Записки по Компютърна Топология

Борис Грозев

Това са неофициални записки от курса „Компютърна Топология“ на доц. Димов, воден през летния семестър на 2009/2010 във ФМИ на СУ. Вероятно има неточни неща и грешки. Записките следват материала стриктно, но самия начин на записване се различава от писаното на дъската.

Тъй като правя записките по време на курса, съдържанието се изменя. Можете да намерите текуща версия на адрес:
`http://mustelinae.net/fmi/comp_top/`
Тази версия е от 5 юли 2010 г..

Конспект:

1. Множества. Декартови произведения. Релации. Видове релации. Функции. Релации на еквивалентност и разбивания.

2. Преднаредени и частично наредени множества (=чнм). Линейно наредени и добре наредени множества. Аксиома за избора. Лема на Куратовски-Цорн.

3. Равномощни множества. Теорема на Кантор за мощността на експонентата. Ординални и кардинални числа. Канторово множество. Мощност на реалната права.

4. Дефиниция на топологично пространство (=то). Отворени множества и околност на точка. Дискретни и антидискретни топологични пространства. Александровски пространства. Топологиите $\mathcal{R}(P), \mathcal{L}(P)$ и $\Sigma(P)$ (= топология на Скот) на едно чнм $P = (X, \leq)$. Права на майкъл

5. База на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена база. Тегло на тп. Теорема на Александров-Урисон за бази (без д-во). Права на Зоргенфрей. Линейно наредени пространства.

6. Предбаза на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена предбаза. Сравнение на топологии. Теорема: фамилията от всички топологии в дадено множество е пълна решетка. Горно-интервална топология, долно-интервална топология и топология на Лоусън в едно чнм.

7. Локални бази и базисни системи от околности в тп. Характер на точка в тп и характер на тп. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададена базисна система от околности. Хаусдорфови пространства. Равнина на Немицки. Конструиране на Александровско пространство чрез аксиоматично зададена най-малка база. Топология на Халимски в множеството на целите числа (= дигиталната права)

8. Затворени множества. Въвеждане на топология чрез аксиоматично задаване на затворените множества. Кофинитна топология, T_1 пространства.

9. Затворена обвивка. Въвеждане на топология с помощта на оператор на Чех или оператор на Куратовски. Конструиране на Александровско пространство чрез оператор на затворена обвивка.

10. T_0 пространства. Специализираща наредба и нейните свойства. Теорема на Александров за специализиращата наредба. Биективно съответствие между частичните наредби в едно множество X и Александровските T_0-топологии в X. Теорема на Кришнамурти.

11. Вътрешност на подмножество на тп - елементарни свойства. Въвеждане на топология чрез аксиоматично зададен оператор за вътрешност. Контур на подмножество на тп. Точки на сгъстяване и изолирани точки. Навсякъде гъсти, когъсти и никъде гъсти подмножества на тп. Гъстота на тп.

12. Непрекъснати изображения между тп - основни свойства и характеризации. Топологии, породени от множество от функции - елементарни свойства. Отворени и затворени изображения. Хомеоморфизми.

13. Подпространства. Суми и произведения на тп.

14. Финитни топологии. Фактор-пространства. Примери: лист на Мьобиус, проективната равнина, бутилката на Клайн.

15. Дефиниция на решетка, пълни решетка и dcpo. Първа теорема на Марковски (без д-во). Характеризация на непрекъснатите изображения между dcpo-та, снабдени с топологията на Скот. Топологиите $\Sigma_c(P)$.

16. Cpo-та. Теореми на Кнастер-Тарски и Тарски за неподвижните точки на монотонни изображения. Втора теорема на Марковски (без д-во).

17. Теорема на Тарски-Канторович за най-малката неподвижна точка на непрекъснато изображение. Области на Скот. Индукционен принцип за неподвижни точки.

18. T_i-пространства, $i = 3, 3.5, 4, 5, 6$. Лема на Урисон и теорема на Титце-Урисон (без д-ва).

19. Компактни и локално компактни пространства - основни свойстра. Теорема на Тихонов за произведения на компактни пространства (без д-во). Теорема на Александров за непрекъснатите образи на Канторовото множество (без д-во). Теорема на Пеано (без д-во).

20. Свързани пространства - основни свойстра. Компонента на свързаност. Теорема на Жордан (без д-во). Топологична класификация на компактните двумерни повърхнини (без д-во).

21. Дигитална топология. Теорема на Халимски (= дигитална теорема на Жордан) и теорема на Розенфелд (без д-во).

1 Множества ...

Много много накратко - само някои не съвсем очевидни неща, които се използват често.

Лема. *Нека $f : A \to B$ е функция. Тогава f е биекция точно когато съществува $g : B \to A$, такава че $g \circ f = \mathrm{Id}_A$ и $f \circ g = \mathrm{Id}_B$, където $\circ$ означава композиция.*

Дефиниция. *Нека $\rho \subseteq A \times A$. Казваме, че ρ е релация на еквивалентност, ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна релация.*

Дефиниция. *Нека $A \subseteq \mathcal{P}(X)$, тоест A е фамилия от подмножества на X. Казваме, че:*

- *A е покритие на X, ако $\cup A = X$.*
- *A е дизюнктна фамилия, ако $(\forall a, b \in A, a \neq b)(a \cap b = \emptyset)$.*
- *A е разбиване на X, ако A е дизюнктна фамилия, A е покритие на X и $\emptyset \notin A$.*

Ако ρ е релация на еквивалентност в X и $a \in X$, то клас на еквивалентност на a наричаме множеството $[a] \leftrightharpoons \{b \in X \mid a\rho b\}$. Оказва се, че класовете на еквивалентност на елементите на X образуват едно разбиване A_ρ. Обратно, ако е дадено разбиване A на X, можем да дефинираме релация на еквивалентност като положим два елемента да са в релация ρ_A точно когато са в един и същ елемент на A. Така дефинираното съответствие между разбиванията и релациите на еквивалентност в едно множество е биективно.

2 Наредби ...

Дефиниция. *Нека* $\rho \subseteq A \times A$. *Казваме, че* ρ *е:*

- *Преднаредба, ако е рефлексивна и транзитивна.*
- *Частична наредба, ако е преднаредба и е антисиметрична.*
- *Линейна наредба, ако е частична наредба и всеки два елемента на* A *са сравними:* $(\forall a, b \in A)(a\rho b \vee b\rho a)$.
- *Строга наредба, ако е ирефлексивна и транзитивна.*
- *Релация на еквивалентност, ако е рефлексивна, симетрична и транзитивна.*

Двойките (A, ρ) *наричаме преднаредени, частично наредени или линейно наредени множества.*

Дефиниция. *Нека* $(A, \leq)$ *е преднаредено множество,* $B \subseteq A$ *и* $m \in A$. *Казваме, че:*

- m *е максимален елемент на* $(A, \leq)$, *ако* $(\forall a \in A)(m \leq a \Rightarrow a \leq m)$
- m *е мажоранта на* B, *ако* $(\forall b \in B)(b \leq m)$.
- m *е миноранта на* B, *ако* $(\forall b \in B)(m \leq b)$.
- B *е верига в* $(A, \leq)$, *ако всеки два елемента на* B *са сравними.*

Дефиниция. *Нека* $(A, \leq)$ *е частично наредено множество (ч.н.м.),* $B \subseteq A$ *и* $m \in A$. *Казваме, че:*

- m *е най-голям елемент на* A, *ако* $(\forall a \in A)(a \leq m)$.
- m *е най-малък елемент на* A, *ако* $(\forall a \in A)(m \leq a)$.
- m *е супремум на* B, *ако* m *е най-малката мажоранта на* B. *Означаваме* $\sup B = m$.
- m *е инфимум на* B, *ако* m *е най-голямата миноранта на* B. *Означаваме* $\inf B = m$.

Дефиниция. *Едно ч.н.м.* (A, ρ) *се нарича добре наредено множество, ако всяко непразно подмножество на* A *има най-малък елемент.*

Аксиома за избора (AC): Нека $\mathcal{A}$ е дизюнктна фамилия от непразни множества ($\mathcal{A}$ е разбиване). Тогава съществува множество S със свойството:

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\exists y)(S \cap A = \{y\})$$

Тоест, ако $\mathcal{A}$ е разбиване, можем да „изберем“ по един елемент от всеки негов елемент. Аксиомата за избора е независима от останалите аксиоми на ZF.

Теорема. *Следните условия са еквивалентни:*

1. *AC (аксиомата за избора)*
2. *Теорема на Цермело: всяко множество може да бъде добре наредено*
3. *LZ (лема на Куратовски-Цорн): ако $(A, \leq)$ е преднаредено множество и всяка верига в $(A, \leq)$ има мажоранта, то $(A, \leq)$ има поне един максимален елемент.*

3 Ординални и кардинални числа ...

Тук нещата са доста деликатни, а аз не записвах особено подробно. Затова не ми вярвайте много ...

Ординални числа

Първо още малко неща за добрите наредби.

Едно добре наредено множество винаги е линейно наредено. Ако има максимален елемент, то той е единствен. Всеки елемент, с изключение на максималния (ако го има), има наследник. Наследника на a се бележи с a^+ и е най-малкият измежду всички по-големи елементи — $a^+ \risingdotseq \min\{b \mid a \leq b, a \neq b\}$

Не всеки елемент има предходник - най-малкият няма предходник, но може да има и други без предходник — наричат се гранични.

Дефиниция. *Нека $(A, \leq)$ е д.н.м. Множествата от вида $\{a \in A \mid a \leq b, a \neq b\}$ където b е произволен елемент на A наричаме начални сегменти на A.*

Дефиниция. *Нека $(A, \leq)$ и $(B, \preceq)$ са ч.н.м. и $f : A \to B$ е функция. f се нарича растяща, ако $a \leq b \Rightarrow f(a) \preceq f(b)$*

Дефиниция. *Две ч.н.м. $(A, \leq)$ и $(B, \preceq)$ се наричат изоморфни, ако съществува биекция $f : A \to B$, такава че f и f^{-1} са растящи.*

Тоест f „запазва наредбата“ — имаме $a \leq b$ тогава и само тогава когато $f(a) \preceq f(b)$.

Релацията на изоморфизъм в класа на всички добре наредени множества е релация на еквивалентност. Класовете на еквивалентност на тази релация наричаме ординални числа[1].

Теорема. *Нека $(A, \leq)$ и $(B, \preceq)$ са добре наредени множества. Тогава е изпълнено точно едно от следните три условия:*

1. *$(A, \leq)$ и $(B, \preceq)$ са изоморфни.*
2. *$(A, \leq)$ е изоморфно на начален сегмент на $(B, \preceq)$.*
3. *$(B, \preceq)$ е изоморфно на начален сегмент на $(A, \leq)$.*

Дефиниция. *Нека $(A, \leq)$ и $(B, \preceq)$ са добре наредени множества и α и β са техните класове на еквивалентност в релацията изоморфизъм. Дефинираме релация $\leq$ между ординални числа, като $\alpha \leq \beta$ точно тогава, когато е изпълнено едно от първите две условия на миналата теорема.*

Теорема. *Класът* Ord *на всички ординални числа е добре нареден от релацията от миналата дефиниция.*

[1] Възможно е ординалните числа да се дефинират еквивалентно като множества, които изпълняват определени условия.

При крайните множества нещата са прости, защото за множество с n елемента има единствена добра наредба с точност до изоморфизъм. Но например в множеството на естествените числа има различни добри наредби. Естествената наредба $\leq$ е добра наредба, както и наредбата $\preceq$ при която „първи“ са четните числа, а след това нечетните[2], но тези две наредби не са изоморфни.

Кардинални числа

Дефиниция. *Казваме, че две множества са равномощни, ако съществува биекция между тях.*

Разглеждаме равномощността на множества като релация в класа на всички множества. Оказва се, че това е релация на еквивалентност. Класовете на тази релация наричаме кардинални числа.

Ако A е множество, класа на еквивалентност на A означаваме с $|A|$.

Казваме, че A не надминава по мощност B, ако съществува инекция от A в B. Така дефинираме релацията $\leq$ в класа на ординалните числа — $|A| \leq |B|$ ако A не надминава по мощност B.

Тази релация се оказва линейна (добра?) наредба в класа на кардиналните числа, като нейната антисиметричност следва от следната

Теорема. *(Кантор-Шрьорер-Бернщайн) Ако A и B са множества, $|A| \leq |B|$ и $|B| \leq |A|$, то $|A| = |B|$.*

Ако $|A| \leq |B|$ и $|A| \neq |B|$, пишем $|A| < |B|$.

Теорема. *(Кантор) Нека A е множество. Тогава $|A| < |\mathcal{P}(A)$.*

Функцията $f : A \to \mathcal{P}(A)$, дефинирана като $f(a) \leftrightharpoons \{a\}$ е инекция, следователно $|A| \leq |\mathcal{P}(A)|$.

Да допуснем, че $|A| = |\mathcal{P}(A)|$. Нека $f : A \to \mathcal{P}(A)$ е биекция.

Нека $B \leftrightharpoons \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Понеже $B \subseteq A$, а f е биекция, съществува $a_0 \in A$, такова че $B = f(a_0)$. Но тогава $a_0 \in B$ т.с.т.к $a_0 \in f(a_0)$ т.с.т.к. $a_0 \notin B$.

Следователно не е вярно, че $|A| = |\mathcal{P}(A)|$, следователно $|A| < |\mathcal{P}(A)$.

Дефиниция. *Нека $\tau = |A|$, $\eta = |B|$ са кардинални числа и $A \cap B = \emptyset$. Полагаме:*

- $\tau + \eta = |A \cup B|$
- $\tau.\eta = |A \times B|$
- $\tau^\eta = |\{f | f : B \to A\}|$

[2] Тоест, $m \preceq n$ точно когато (m е четно и n е нечетно) или (m и n са с еднаква четност и $m \leq n$).

Твърдение. *Операциите + и . са комутативни, асоциативни и дистрибутивни.*

Дефиниция. *Нека $\tau = |A|$ е кардинално число. Полагаме*

$$2^\tau = |\{f \mid f : A \to \{0,1\}\}|$$

Твърдение. *Нека A е множество. Тогава $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$*

Твърдение. *Нека τ е безкрайно кардинално число и $n \in \mathbb{N}$. В сила са равенствата:*

- $\tau + \tau = \tau$
- $\tau = \tau.\tau = \cdots = \tau^n$

Следствие: Правата и равнината са равномощни: $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2| = \cdots = |\mathbb{R}^n|$.

Мощността на множеството на естествените числа означаваме с $\aleph_0$.

Дефиниция. *Казваме, че множеството A е изброимо ако $|A| \leq \aleph_0$.*

Канторово множество и мощност на $\mathbb{R}$

Множеството

$$C \coloneqq \Big\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2.a_n}{3^n} \mid (\forall n \in \mathbb{N}^+)(a_n \in \{0,1\}) \Big\}$$

се нарича Канторово множество. Всеки елемент на това множество е сходящ ред (сходящ, защото има 3^n в знаменател), следователно това е множество от реални числа — $C \subseteq \mathbb{R}$. Също, всеки елемент е определен от една безкрайна редица a_n (като n се променя от 1 до ∞). Ще видим, че на различни редици отговарят различни реални числа.

Нека $k \in \mathbb{N}^+$. Означаваме с x_k произволен ред от вида $\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2.a_n}{3^n}$. За x_k имаме следната оценка:

$$0 \leq x_k \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{2}{3^n} \leq \frac{2}{3^{k+1}}(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots) = \frac{1}{3^k}$$

.

Нека сега $x \in C$ е произволно.

- Ако $a_1 = 0$, имаме $x = x_1$, следователно $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$
- Ако $a_1 = 1$, имаме $x = \frac{2}{3} + x_1$, следователно $\frac{2}{3} \leq x \leq 1$

И в двата случая $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$. Да разгледаме първите два члена на редицата.

- Ако $a_1 = a_2 = 0$, имаме $x = x_2$, следователно $0 \leq x \leq \frac{1}{9}$

- Ако $a_1 = 0, a_2 = 1$, имаме $x = \frac{2}{9} + x_2$, следователно $\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{2}{9} + \frac{1}{3^2} = \frac{1}{3}$
- Ако $a_1 = 1, a_2 = 0$, имаме $x = \frac{2}{3} + x_2$, следователно $\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{9}$
- Ако $a_1 = a_2 = 1$, имаме $x = \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + x_2$, следователно $\frac{8}{9} \leq x \leq 1$

Сега освен, че $x \notin (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ получаваме и $x \notin (\frac{1}{9}, \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$. По този начин, разглеждайки стойностите на първите членове на редицата можем да определим интервали, от които няма точки в Канторовото множество. Ако продължим така, на всяка стъпка ще получаваме още интервали, в които няма точки.

Нека a_n и b_n са две различни редици от нули и единици и нека x и y са елементите от Канторовото множество, съответни на тях. Нека $k \in \mathbb{N}^+$ е първото място, на което редиците се различават. Нека (БОО) $a_k = 0, b_k = 1$. Нека означим $\sum_{n=1}^{k-1} \frac{2.a_n}{3^n} = \sum_{n=1}^{k-1} \frac{2.b_n}{3^n} = c$. Тогава $x = c + x_{k+1}$, а $y = c + \frac{2}{3^k} + y_{k+1}$, където y_{k+1} е ред от вида на x_{k+1}, за който важи същата оценка. Тогава:

$$c \leq x \leq c + \frac{1}{3^{k+1}} < c + \frac{1}{3^k} \leq y$$

.

Следователно $x \neq y$. Следователно имаме инективно изображение от множеството на всички редици от нули и единици, което е точно $\{f : \mathbb{N}^+ \to \{0,1\} \mid f \text{ е функция } \}$, в C. Всъщност, C е дефирано като стойностите на това изображение, следователно то е биективно. Следователно $|C| = |\{f : \mathbb{N}^+ \to \{0,1\}\}| = 2^{\aleph_0}$. И понеже $C \subseteq \mathbb{R}$ имаме $|C| \leq |\mathbb{R}|$ (идентитетът е инекция). Оттук следва $2^{\aleph_0} \leq |\mathbb{R}|$.

Обратното неравенство — $|\mathbb{R}| \leq 2^{\aleph_0}$ можем да докажем като разгледаме функция, която на реално число от $(0,1)$ съпоставя безкрайният му двоичен запис[3]. Различните числа имат различен запис, следователно имаме инективна функция от $(0,1)$ в множеството на редиците от нули и единици. Отделно $|\mathbb{R}| = |(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$ защото $\mathrm{tg}(x)$ е биекция, и $|(0,1)| = |(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})|$, защото $f(x) = x.\frac{\pi}{2}$ е биекция.

Оттук по теоремата на Кантор-Шрьодер-Бернщайн получаваме $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$. Означаваме $|\mathbb{R}| = \mathfrak{C}$.

[3]Всъщност този запис не е единствен, защото например 1 може да се представи като $1,000\ldots$ и $0,111\ldots$, но това можем да го „заобиколим“ като поискаме записа да не завършва с единици. Мощността на полученото множеството не се променя, заради твърдението, че за безкрайно A, ако $|A| < |B|$, то $|A \setminus B| = |A|$

4 Дефиниция на т.п. ...

Дефиниция. *Нека X е множество и $\tau \subseteq \mathcal{P}(X)$. τ се нарича топология в X, ако удовлетворява следните аксиоми:*

- *(O1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$*
- *(O2) Ако $U_1, U_2 \in \tau$, то $U_1 \cap U_2 \in \tau$*
  (τ е затворено относно крайно сечение)
- *(O3) Ако $\tau' \subseteq \tau$, то $\cup\tau' \in \tau$*
  (τ е затворено относно произволно обединение)

Дефиниция. *Нека X е множество и τ е топология в X. Двойката (X, τ) наричаме топологично пространство (т.п.). Елементите на X наричаме точки. Елементите на τ наричаме отворени множества.*

Дефиниция. *Нека (X, τ) е топологично пространство и $x \in X$. Казваме, че U е околност на x ако $U \in \tau$ и $x \in U$.*

Примери:

1. Нека X е произволно множество. Тогава $(X, \mathcal{P}(X))$ е топологично пространство. Наричаме го дискретно пространство.
2. Нека X е произволно множество. Тогава $(X, \{\emptyset, X\})$ е топологично пространство. Наричаме го антидискретно пространство.
3. Нека $n \in \mathbb{N}^+$. Дефинираме естествената топология $\tau_{\text{ест}}$ в $\mathbb{R}^n$ така: Едно множество $U \subseteq \mathbb{R}^n$ е отворено, ако за всяко $x \in U$ съществува кълбо с център x, което се съдържа в U. По-надолу има точна дефиниция.
4. Нека $X = \{0, 1\}$, $\tau = \{\emptyset, X, \{1\}\}$. Наричаме (X, τ) пространство на Серпински.

Твърдение 1. *Нека (X, τ) е топологично пространство и $U \subseteq X$. Тогава $U \in \tau$ (U е отворено) т.с.т.к. за всяка точка $x \in U$ съществува околност V на x, такава че $V \subseteq U$.*

$\rightarrow$) Нека U е отворено. Тогава самото U изпълнява исканите условия.
$\leftarrow$) Нека $U \subseteq X$ и е изпълнено условието от твърдението. Тоест, $(\forall x \in U)(\exists V_x \in \tau)(x \in V_x \subseteq U)$. Тогава $U = \bigcup\limits_{x \in U} V_x$, където всяко V_x е от τ. От (O3) получаваме $U \in \tau$. $\square$

Дефиниция. *Едно топологично пространство (X, τ) се нарича Александровско, ако е затворено относно произволно сечение. Тоест ако е в сила:*

$$(\forall \tau' \subseteq \tau)(\cap\tau' \in \tau)$$

Ако X е крайно множество, то всяко топологично пространство (X, τ) е Александровско, защото тогава τ също е крайно (и можем да приложим (O2) краен брой пъти). В общия случай това не е в сила, но има и безкрайни Александровски пристранства.

Дефиниция. *Нека $(X, \leq)$ е частично наредено множество (ч.н.м.), нека $x \in X$ и $A \subseteq X$. Въвеждаме следните означения*[4]*:*

$$
\begin{aligned}
\uparrow\! x &\coloneqq \{y \in X \mid x \leq y\} \\
\downarrow\! x &\coloneqq \{y \in X \mid y \leq x\} \\
\Uparrow\! A &\coloneqq \bigcup_{a \in A} \uparrow\! a \\
\Downarrow\! A &\coloneqq \bigcup_{a \in A} \downarrow\! a
\end{aligned}
$$

Множествата $\uparrow\! x$ и $\downarrow\! x$ наричаме съответно горен и долен конус на x.

Дефиниция. *Нека $(X, \leq)$ е ч.н.м и $M \subseteq X$. Казваме, че M е:*

- *Дясно, ако:* $(\forall x \in M)(\uparrow\! x \subseteq M)$
- *Ляво, ако:* $(\forall x \in M)(\downarrow\! x \subseteq M)$

Твърдение 2. *Нека $(X, \leq)$ е ч.н.м. и $A \subseteq X$. Тогава A е дясно т.с.т.к. $A = \Uparrow\! A$.*

$\rightarrow$) Нека A е дясно. Тогава $(\forall x \in A)(\uparrow\! x \in A)$, тоест $\Uparrow\! A \subseteq A$. Но, за всяко $a \in A$ имаме $a \in \uparrow\! a$, следователно $A \subseteq \Uparrow\! A$. Следователно $A = \Uparrow\! A$.

$\leftarrow$) Нека $A = \Uparrow\! A$, тоест $A = \bigcup_{a \in A} \uparrow\! a$. Нека $a \in A$ е произволно. Тогава $\uparrow\! a \subseteq A$, следователно A е дясно. $\square$

Аналогично се вижда, че A е ляво т.с.т.к. $A = \Downarrow\! A$.

Дефиниция. *Нека $P = (X, \leq)$ е ч.н.м. Означаваме фамилията от всички десни подмножества на X с $\mathcal{R}(P)$ (а тази от левите – с $\mathcal{L}(P)$):*

$$\mathcal{R}(P) \coloneqq \{A \subseteq X \mid A = \Uparrow\! A\}$$

$$\mathcal{L}(P) \coloneqq \{A \subseteq X \mid A = \Downarrow\! A\}$$

Твърдение 3. *Нека $P = (X, \leq)$ е ч.н.м. Тогава $(X, \mathcal{R}(P))$ и $(X, \mathcal{L}(P))$ са Александровски проствaнства.*

Ще проверим аксиоми (O1) и (O3) и условието от дефиницията за александровско пространство за десните множества. Аксиома (O2) следва от това условие, доказателството за левите множества е аналогично.

[4] На лекции използвахме единични стрелки за двете означения, но тук използвам двойна в единия случай за да избегна объркавания

- (O1) $\emptyset$ и X очевидно са десни ($\emptyset = \Uparrow\emptyset$, $X = \Uparrow X$).

- (O2') Нека $U = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е произволна подфамилия на $R(X)$. Нека $x \in \cap U$ е произволно. За всяко $\alpha \in A$ имаме, че U_α е дясно и $x \in U_\alpha$, следователно $\uparrow x \subseteq U_\alpha$. Тогава $\uparrow x \subseteq \cap U$, но x е произволно, следователно $\cap U$ е дясно.

- (O3) Нека $U = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е произволна подфамилия на $R(X)$. Нека $x \in \cup U$. Тогава $(\exists \alpha \in A)(x \in U_\alpha)$. Нека α има това свойство. Тогава $\uparrow x \subseteq U_\alpha$, защото U_α е дясно. Но $U_\alpha \subseteq \cup U$, следователно $\uparrow x \subseteq \cup U$, тоест $\cup U$ е дясно.

Следователно $(X, \mathcal{R}(P))$ е Александровско пространство. $\square$

Дефиниция. *Нека $P = (X, \leq)$ е ч.н.м. и $\emptyset \neq D \subseteq X$. Казваме, че D е насочено, ако $(\forall x, y \in D)(\exists z \in D)(x \leq z, y \leq z)$.*

Дефиниция. *Нека $P = (X, \leq)$ е ч.н.м. и $U \subseteq X$. Казваме, че U е Скот-отворено, ако U е дясно и е изпълнено:*
Ако $D \subseteq X$ е насочено, D има супремум и $\sup D \in U$, то $U \cap D \neq \emptyset$.

Означаваме

$$\Sigma(P) \risingdotseq \{U \subseteq X \mid U \text{ „е Скот-отворено“}\}$$

Твърдение 4. *Ако $P = (X, \leq)$ е ч.н.м., то $(X, \Sigma(P))$ е топологично пространство.*

- (O1) Нека $D \subseteq X$ е насочено ($D \neq \emptyset$). Тогава $X \cap D \neq \emptyset$, тоест X е Скот-отворено. Празното множество също е Скот-отворено, защото не е възможно $\sup D \in \emptyset$.

- (O2) Нека U и V са Скот-отворени. Вече показахме, че сечение на десни множества е дясно. Нека $D \subseteq X$ е насочено и $\sup D \in U \cap V$. Тогава $U \cap D \neq \emptyset$ и $V \cap D \neq \emptyset$, защото U и V са Скот-отворени. Нека $x \in U \cap D$, $y \in V \cap D$. Тогава $x, y \in D$ и понеже D е насочено $(\exists z \in D)(x \leq z, y \leq z)$. Тоест $z \in \uparrow x$, $z \in \uparrow y$. Но $\uparrow x \subseteq U$ и $\uparrow y \subseteq V$, защото U и V са десни, следователно $z \in U$ и $z \in V$. Тогава $z \in (U \cap V) \cap D$, тоест $U \cap V$ е Скот-отворено.

- (O3) Нека $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \Sigma(P)$. Нека означим $U = \cup \mathcal{U}$. Нека $D \subseteq X$ е насочено и съществува $\sup D \in U$. Тогава $(\exists \alpha \in A)(\sup D \in U_\alpha)$. Тогава, понеже U_α е Скот-отворено, имаме $U_\alpha \cap D \neq \emptyset$. Но $U_\alpha \subseteq U$, следователно $U \cap D \neq \emptyset$. Следователно $U = \cup \mathcal{U}$ е Скот-отворено.

Следователно $(X, \Sigma(P))$ е топологично пространство. $\square$

Пример: Нека $X = \{0,1\}$ и нека вземем числовата наредба $(0 \leq 1)$. Тогава $\mathcal{P}(X) = \big\{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}\big\}$. Имаме:

$$\Uparrow\emptyset = \emptyset$$

$$\Uparrow\{0\} = \uparrow 0 = \{0,1\} \neq \{0\}$$

$$\Uparrow\{1\} = \uparrow 1 = \{1\}$$

$$\Uparrow\{0,1\} = \uparrow 0 \cup \uparrow 1 = \{0,1\} \cup \{1\} = \{0,1\}$$

Следователно десни са $\emptyset, \{1\}$ и $\{0,1\}$. Вече знаем, че $\emptyset$ и $\{0,1\}$ са Скот-отворени, да проверим за $\{1\}$. Нека $D \subseteq \{0,1\}$ е насочено и $\sup D \in \{1\}$. Тогава $\sup D = 1$, следователно $D = \{1\}$ или $\{0,1\}$. И в двата случая $D \cap \{1\} = \{1\} \neq \emptyset$, следователно $\{1\}$ е Скот-отворено. Така получаваме

$$\Sigma((X, \leq)) = \{\emptyset, \{1\}, \{0,1\}\}$$

Топологията на Скот върху $\{0,1\}$ съвпада с топологията на Серпински.

Дефиниция. *Нека (X, τ) е топологично пространство, $M \subseteq X$ и $U \in \tau$. Множеството $U \cap M$ наричаме следа на U в M.*

Твърдение 5. *Нека (X, τ) е т.п. и $M \subseteq X$. Полагаме*

$$\tau/_M \leftrightharpoons \{U \cap M \mid U \in \tau\}$$

Тогава $\tau/_M$ е топология в M (нарича се индуцирана топология в τ от M). Двойката $(M, \tau/_M)$ наричаме топологично подпространство на (X, τ) (?).

Очевидно $\tau/_M \subseteq \mathcal{P}(M)$. Вижда се, че $Z \in \tau/_M$ точно когато Z се представя във вида $U \cap M$ за някое $U \in \tau$. Ще проверим аксиомите.

- (O1) $\emptyset = \emptyset \cap M$, $M = X \cap M$
- (O2) Нека $U \cap M, V \cap M \in \tau/_M$. Тогава $(U \cap M) \cap (V \cap M) = (U \cap V) \cap M$. Но $U \cap V \in \tau$ защото τ е топология, следователно $(U \cap V) \cap M \in \tau/_M$.
- (O3) Нека $\mathcal{U} = \{U_\alpha \cap M \mid \alpha \in A\} \subseteq \tau/_M$. Тогава $\cup\mathcal{U} = \bigcup\limits_{\alpha \in A}(U_\alpha \cap M) = (\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha) \cap M$. Но $\bigcup\limits_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau$, следователно $\cup\mathcal{U} \in \tau/_M$.

Следователно $(M, \tau/_M)$ е топологично пространство. $\square$

Твърдение 6. *Нека (X, τ) е т.п. и $M \subseteq X$. Полагаме $\tau_M = \{U \cup K \mid U \in \tau, K \subseteq X \setminus M\}$.*

Тогава (X, τ_M) е т.п. и $(X \setminus M, \tau_{M/_{(X \setminus M)}})$ е дискретно т.п.

- (O1) $\emptyset = \emptyset \cup \emptyset \in \tau_M$ и $X = X \cup \emptyset \in \tau_M$

- (O2) Нека $U \cup K, V \cup L \in \tau_M$. Тогава

$$(U \cup K) \cap (V \cup L) = \underbrace{(U \cap V)}_{\in \tau} \cup \underbrace{\Big((K \cap V) \cup (U \cap L) \cup (K \cap L)\Big)}_{\subseteq X \setminus M} \in \tau_M$$

- (O3) Нека $U = \{U_\alpha \cup K_\alpha \mid \alpha \in A, U_\alpha \in \tau, K_\alpha \subseteq X \setminus M\} \subseteq \tau_M$. Тогава

$$\cup U = \underbrace{(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha)}_{\in \tau} \cup \underbrace{(\bigcup_{\alpha \in A} K_\alpha)}_{\subseteq X \setminus M} \in \tau_M$$

Следователно (X, τ_M) е т.п. Да проверим, че $(X \setminus M, \tau_{M/_{(X \setminus M)}})$ е дискретно, тоест че $\tau_{M/_{(X \setminus M)}} = \mathcal{P}(X \setminus M)$.

Нека $K \subseteq X \setminus M$. Тогава $\emptyset \cup K \in \tau_M$ и можем да представим K като

$$K = \underbrace{(\emptyset \cup K)}_{\in \tau_M} \cap \underbrace{(X \setminus M)}_{\subseteq X \setminus M} \in \tau_{M/_{(X \setminus M)}}$$

Следователно $\mathcal{P}(X \setminus M) \subseteq \tau_{M/_{(X \setminus M)}}$. Обратното включване е очевидно.

Упражниения:

В следващите параграфи n е произволно фиксирано естествено число (без 0). Ако $x, y \in \mathbb{R}^n$, означаваме с $\rho(x,y)$ разстоянието между x и y. То отговаря на условията (за произволни x, y, z):

1. $\rho(x,y) \geq 0$ и $\rho(x,y) = 0$ т.с.т.к. $x = y$
2. $\rho(x,y) = \rho(y,x)$
3. $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y)$

Дефиниция. *Нека $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Кълбо с център x и радиус ε наричаме:*

$$B(x, \varepsilon) \leftrightharpoons \{y \in \mathbb{R}^n \mid \rho(x,y) < \varepsilon\}$$

Дефиниция. *Нека $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Казваме, че U е отворено_[5], ако:*

$$(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)(B(x,\varepsilon) \subseteq U)$$

Полагаме $\tau \leftrightharpoons \{U \subseteq \mathbb{R}^n \mid U$ „е отворено_“$\}$. Ще докажем, че $(\mathbb{R}^n, \tau)$ е топологично пространство (τ - естествената топология).

- (O1) Очевидно $\emptyset$ и $\mathbb{R}^n$ са отворени_.

[5]Отново различно означение, за да не става объркване с двете значения на „отворено“

- (O2) Нека $U, V \in \tau$. Ако $U \cap V = \emptyset$, то $U \cap V \in \tau$. Иначе, нека $x \in U \cap V$. Тогава $(\exists \varepsilon_1 > 0)(B(x, \varepsilon_1) \subseteq U)$ и $(\exists \varepsilon_2 > 0)(B(x, \varepsilon_2) \subseteq V)$. Нека $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Тогава $B(x, \varepsilon) \subseteq U \cap V$, тоест $U \cap V$ е отворено_.

- (O3) Нека $\mathcal{U} = \{U_\alpha \in \tau \mid \alpha \in A\}$. Нека $U = \cup \mathcal{U}$. Нека $x \in U$. Тогава $(\exists \alpha \in A)(x \in U_\alpha)$. Но $U_\alpha \in \tau$, следователно $(\exists \varepsilon > 0)(B(x, \varepsilon) \subseteq U_\alpha)$. Но $U_\alpha \subseteq U$, следователно $(\exists \varepsilon > 0)(B(x, \varepsilon) \subseteq U)$. Следователно U е отворено_.

Задача: Нека $x \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$. Да се докаже, че $B(x, \varepsilon) \in \tau$.

$B(x, \varepsilon) \in \tau$ точно когато $(\forall y \in B(x, \varepsilon))(\exists \delta_y > 0)(B(y, \delta_y) \subseteq B(x, \varepsilon))$. Нека $y \in B(x, \varepsilon)$ е произволно. Избираме $\delta_y > 0$ такова, че $\delta_y < \varepsilon - \rho(x, y)$. Такова има, защото $\rho(x, y) < \varepsilon$.
Нека $z \in B(y, \delta_y)$ е произволно. Тогава $\rho(y, z) < \delta_y$. Получаваме последователно:
$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$
$\rho(x, z) < \rho(x, y) + \delta_y$
$\rho(x, z) < \rho(x, y) + \varepsilon - \rho(x, y)$
$\rho(x, z) < \varepsilon$
Следователно $z \in B(x, \varepsilon)$, следователно $B(y, \delta_y) \subseteq B(x, \varepsilon)$, следователно $B(x, \varepsilon) \in \tau$.

Задача: Нека $P = (X, \leq)$ е частично наредено множество, като X е крайно. Докажете, че $\mathcal{R}(P) = \Sigma(P)$.

По дефиниция $\Sigma(P) \subseteq \mathcal{R}(P)$. Остава да покажем, че $\mathcal{R}(P) \subseteq \Sigma(P)$, тоест, че всяко дясно подмножество на X е Скот-отворено[6].

Нека $U \in \mathcal{R}(P)$ е произволно, нека $D \subseteq X$ е произволно насочено и нека $\sup D \in U$. D е крайно и е частично наредено, следователно има поне един максимален елемент. Нека $x, y \in D$ са максимални в D. Понеже D е насочено имаме $(\exists z \in D)(x \leq z \;\; \& \;\; y \leq z)$. Но x е максимален и $x \leq z$ по дефиниция (на максимален елемент) означава $x = z$. Аналогично $y = z$, следователно всеки два максимални елемента на D съвпадат, тоест D има най-голям елемент. Нека това е m. Тогава m е мажоранта на D, следователно $\sup D \leq m$. Но $m \leq \sup D$, защото $m \in D$, следователно $m = \sup D$. Така $\sup D \in D$ и $\sup D \in U$, следователно $U \cap D \neq \emptyset$. Следователно U е Скот-отворено. $\square$

[6] Доказателството, което следва не е това от лекциите, защото го нямам записано. Може да не е коректно.

Дефиниция. *Нека (X, τ) и (Y, O) са топологични пространства. Нека $f : X \to Y$ е функция. Казваме, че f е непрекъсната, ако за всяко $V \in O$, праобразът*[7] *$f^{-1}[V] \in \tau$*

Дефиниция. *Нека (X, τ) и (Y, O) са топологични пространства. Функцията $f : X \to Y$ се нарича хомеоморфизъм, ако е биекция и f и f^{-1} са непрекъснати.*

Дефиниция. *Две топологични пространства се наричат хомеоморфни, ако съществува хомеоморфизъм между тях.*

Дефиниция. *Нека X е множество и τ_1, τ_2 са топологии в X. Казваме, че τ_1 е по-слаба от τ_2 (или, че τ_2 е по-силна от τ_1), ако $\tau_1 \subseteq \tau_2$.*

Множеството на всички топологии в X е частично наредено от тази релация. Най-слабата топология в X е антидискретната - $\{\emptyset, X\}$, а най-силната — дискретната - $\mathcal{P}(X)$.

Твърдение 7. *Нека $\Phi = \{f_\alpha : (X_\alpha, \tau_\alpha) \to Y \mid \alpha \in A, (X_\alpha, \tau_\alpha) \text{ е т.п. }\}$. Полагаме*

$$\tau_\Phi \leftrightharpoons \{U \subseteq Y \mid (\forall \alpha \in A)(f_\alpha^{-1}[U] \in \tau_\alpha)\}$$

Тогава τ_Φ е тополгия в Y и всички изображения от Φ са непрекъснати (спрямо (Y, τ_Φ)). Нещо повече, τ_Φ е най-силната топология с това свойство.

Аксиомите за топология:

- (O1) За произволно $\alpha \in A$, $\emptyset \in \tau_\alpha$ и $\emptyset = f_\alpha^{-1}[\emptyset]$, следователно $\emptyset \in \tau_\Phi$. Също имаме $f_\alpha^{-1}[Y] = \tau_\alpha$, следователно $Y \in \tau_\Phi$.
- (O2) Нека $U, V \in \tau_\Phi$. За произволно $\alpha \in A$ имаме $f_\alpha^{-1}[U \cap V] = f_\alpha^{-1}[U] \cap f_\alpha^{-1}[V]$, но $f_\alpha^{-1}[U], f_\alpha^{-1}[V] \in \tau_\alpha$, следователно $U \cap V \in \tau_\Phi$.
- (O3) Нека $U = \{U_j \mid j \in J\} \subseteq \tau_\Phi$. За произволни $\alpha \in A$ и $j \in J$ имаме $f_\alpha^{-1}[U_j] \in \tau_\alpha$, и също $f_\alpha^{-1}[\bigcup\limits_{j \in J} U] = \bigcup\limits_{j \in J} f_\alpha^{-1}[U_j]$. Следователно $\cup U \in \tau_\Phi$

Остава да видим, че τ_Φ е максимална по включване със свойството $(\forall \alpha \in A)(f_\alpha : X_\alpha \to Y$ е непрекъсната $)$. Нека O е топология в Y с това свойство, и нека $U \in O$. Тогава за всяко $\alpha \in A$ имаме $f_\alpha^{-1}[U] \in \tau_\alpha$. Следователно $U \in \tau_\Phi$, следователно $O \subseteq \tau_\Phi$.

Наричаме τ_Φ финална топология за фамилията Φ.

[7] Тук използвам означението $f^{-1}[V] = \{x \in X \mid f(x) \in V\}$, за да няма обърквания. На лекции изполваме обикновени скоби за праобраз.

Примери: Нека $\Phi = \{f\}$, като $f : (X, \tau) \to Y$ е сюрекция. Тогава τ_Φ се нарича фактортопология в Y.

Ако имаме релация на еквивалентност ρ в X, то функцията $f : X \to X/\rho$ дефинирана като $f(x) = [x]$ е сюрекция. Ако $\Phi = \{f\}$, то τ_Φ е фактор топология в X/ρ.

Обратно ако имаме сюрекция $f : X \to Y$, то $R \leftrightharpoons \{f^{-1}[y] \mid y \in Y\}$ е разбиване на X. От съответната релация на еквивалентност на R можем да построим фактортопология.

Нека X е множество и $F \subseteq X$. Построяваме разбиването на X („слепваме" елементите на F)

$$R \leftrightharpoons \{F\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus F\}$$

Например ако $X = [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ и $F = \{0, 1\}$, то получената фактортопология е окръжност.

Дефиниция. *Нека $\mathcal{X} = \{X_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Дизюнктна сума на фамилията $\mathcal{X}$ наричаме:*

$$\bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha \leftrightharpoons \cup\{X_\alpha \times \{\alpha\} \mid \alpha \in A\}$$

Нека $\mathcal{X} = \{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$ е множество от топологични пространства. Полагаме $X \leftrightharpoons \bigoplus_{\alpha \in A} X_\alpha$ и за всяко $\alpha \in A$ дефинираме функцията $i_\alpha : X_\alpha \to X$ като $i_\alpha(x) \leftrightharpoons (x, \alpha)$. Полагаме също $\Phi \leftrightharpoons \{i_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

Тогава пространството (X, τ_Φ) (финалната топология на Φ) се нарича топологична сума на пространствата $\{(X_\alpha, \tau_\alpha) \mid \alpha \in A\}$.

5 База на тп ...

Дефиниция. *Нека (X,τ) е топологично пространство и $B \subseteq \tau$. Казваме, че B е база на (X,τ) (или само на τ), ако:*

$$(\forall U \in \tau)(\exists B_U \subseteq B)(U = \cup B_U)$$

Пример: Нека X е множество. Тогава $B = \{\{x\} \mid x \in X\}$ е база на $(X, \mathcal{P}(X))$. Наистина, всяко $U \subseteq X$ се представя като $U = \bigcup\limits_{x\in U} \{x\}$, където $\{x\} \in B$ за всяко $x \in U$.

В случая имаме $|B| = |X| < |\mathcal{P}(X)|$.

Твърдение 8. *Нека (X,τ) е топологично пространство и $B \subseteq \tau$. Тогава B е база тогава и само тогава, когато:*

$$(\forall x \in X)(\forall U \in \tau, U \ni x)(\exists V \in B)(x \in V \subseteq U)$$

$\rightarrow$) Нека B е база, $x \in X$ е произволно и нека $U \in \tau$ е произволна околност на x. Тогава съществува $B_U \subseteq B$, такова че $U = \cup B_U$. Тогава $x \in \cup B_U$, тоест съществува $V \in B_U$, че $x \in V$. Освен това $V \in B$ и $V \subseteq U$, значи V удовлетворява условието.

$\leftarrow$) Нека е изпълнено условието и нека $U \in \tau$ е произволно. Тогава $(\forall x \in U)(\exists V_x \in B)(x \in V_x \subseteq U)$. Полагаме $B_U \leftrightharpoons \{V_x \mid x \in U\}$. Тогава $B_U \subseteq B$ и $\cup B_U = U$, следователно B е база.

Пример: Множеството $B = \{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}, a < b\}$[8] е база на естествената топология в $\mathbb{R}$

Знаем, че $U \subseteq \mathbb{R}$ е отворено в естествената топология т.с.т.к. $(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U)$. Но $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in B$ и от миналото твърдение следва, че B е база.

Твърдение 9. *Нека (X,τ) е топологично пространство и $B \subseteq \tau$ е база. Тогава за B са в сила:*

- *(B1) B е покритие на X — $\cup B = X$*
- *(B2) $(\forall U, V \in B)(\forall x \in U \cap V)(\exists W \in B)(x \in W \subseteq U \cap V)$*

(B1) Знаем, че $X \in \tau$, следователно $(\exists B_X \subseteq B)$, такова че $\cup B_X = X$. Но $\cup B_X \subseteq \cup B \subseteq X$, следователно $\cup B = X$.

(B2) Нека $U, V \in B$ и $x \in U \cap V$ са произволни. Тогава $U \cap V \in \tau$, тоест $U \cap V$ е околност на x. От миналото твърдение следва, че $\exists W \subseteq B$, такова че $x \in W \subseteq U \cap V$. $\square$

Лема. *Нека X е множество и $B \subseteq \mathcal{P}(X)$. Нека с (B2') означим свойството:*

$$(\forall U, V \in B)(\exists B_{U,V} \subseteq B)(U \cap V = \cup B_{U,V})$$

Тогава (B2) и (B2') са еквивалентни.

[8] Тук (a,b) е интервал, не наредена двойка

(B2) → (B2’): Нека $U, V \in B$ и нека $x \in U \cap V$. Тогава от (B2) получаваме, че $(\exists W_x \in B)(x \in W_x \subseteq U \cap V)$. Полагаме $B_{U,V} = \{W_x \mid x \in U \cap V\}$. Тогава $B_{U,V} \subseteq B$ и $\cup B_{U,V} = U \cap V$.

(B2’) → (B2): Нека $U, V \in B$ и $x \in U \cap V$. От (B2’) имаме, че $(\exists B_{U,V} \subseteq B)(\cup B_{U,V} = U \cap V)$. Тогава $(\exists W \in B_{U,V})(x \in W)$, като $W \subseteq B$, което е точно условието (B2).

Теорема 1. *Нека X е множество, $B \subseteq \mathcal{P}(X)$ и B удовлетворява условия (B1) и (B2) от горното твърдение. Полагаме*

$$\tau \leftrightharpoons \{\cup B' \mid B' \subseteq B\}$$

Тогава τ е топология в X и B е база на (X, τ). τ се нарича топология в X, породена от „базата“ B.

Проверяваме аксиомите:

- (O1) $\emptyset = \cup\emptyset, \emptyset \subseteq B$
  $X = \cup B, B \subseteq B$ (следва от свойство (B1))
- (O2) Нека $U, V \in \tau$, тогава $U = \cup B_U, V = \cup B_V$ за някакви $B_U, B_V \subseteq B$. Тогава $U \cap V = (\cup B_U) \cap (\cup B_V) = \cup\{u \cap v \mid u \in B_U, v \in B_V\}$. Но от (B2’) имаме, че за всеки $u \in B_U, v \in B_V$ съществува $B_{u,v} \subseteq B$, такова че $u \cap v = \cup B_{u,v}$. Следователно $\{u \cap v \mid u \in B_U, v \in B_V\} \subseteq B$, следователно $U \cap V \in \tau$.
- (O3) Нека $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \tau$. За всяко $\alpha \in A$ имаме $(\exists B_\alpha \subseteq B)(U_\alpha = \cup B_\alpha)$. Полагаме $B' = \bigcup\limits_{\alpha \in A} B_\alpha$. Тогава $B' \subseteq B$ и $\cup B' = \cup\mathcal{U}$, следователно $\mathcal{U} \in \tau$.

Пример: Нека $X = \mathbb{R}, B = \{[x, r) \mid x \in \mathbb{R}, r \in \mathbb{Q}, x < r\}$. Тогава B удовлетворява (B1) и (B2), следователно поражда топология в $\mathbb{R}$. Тя се нарича топология на Зоргенфрей и се бележи с $(\mathbb{R}, \mathcal{Z})$.

Дефиниция. *Нека (X, τ) е т.п. Тегло на (X, τ) наричаме кардиналното число $\omega(X, \tau) \leftrightharpoons \min\{|B| \mid B \subseteq \tau, B$ е база на $(X, \tau)\}$*

Факт. $\omega(\mathbb{R}, \tau_{ecm}) = \aleph_0$
$\omega(\mathbb{R}, \mathcal{Z}) = \mathfrak{C}$

Факт. *Теорема на Александров-Урисон: Нека (X, τ) е топологично пространство и $\omega(X, \tau) \geq \aleph_0$. Нека B е база на τ. Тогава съществува $B' \subseteq B$, такова, че B' е база и $|B'| = \omega(X, \tau)$.*

Твърдение 10. *Нека (X, τ) е т.п. и B е база на τ. Въвеждаме следните означения за всяко $x \in X$:*
$\tau_x \leftrightharpoons \{U \in \tau \mid x \in U\}$

$B_x \leftrightharpoons \{V \mid x \in V \in B\}$
$N(x) = \cap\tau_x$
Тогава за всяко $x \in X$ е в сила $N(x) = \cap B_x$.

Нека $x \in X$. Имаме $B_x \subseteq \tau_x$, следователно $\cap\tau_x \subseteq \cap B_x$.

Понеже B е база, за всяка околност U на x — $\forall U \in \tau_x$ — съществува $V \in B$, такова че $x \in V \subseteq U$. Но $x \in V$, следователно $V \in B_x$. Следователно $\cap B_x \subseteq \cap\tau_x$.

Следователно $N(x) = \cap\tau_x = \cap B_x$.

Твърдение 11. *Нека (X, τ) е Александровско т.п. Тогава (X, τ) има най-малка* по включване *база* — $B_s \leftrightharpoons \{N(x) \mid x \in X\}$.

За всяко $x \in X$, $N(x) \in \tau$, защото (X, τ) е Александровско т.п., следователно $B_s \subseteq \tau$. Първо ще докажем, че B_s е база.

Нека $U \in \tau$ и $x \in U$ са произволни. Тогава $x \in N(x) \subseteq U$. Но $N(x) \in B_s$, следователно (съгласно твърдение 8) B_s е база.

Нека сега B е произволна база на (X, τ). Ще покажем, че $B_s \subseteq B$.

Нека $V \in B_s$ е произволен елемент — $V = N(x)$ за някое $x \in X$. Тогава, понеже B е база, отново от твърдение 8 получаваме $(\exists U \in B)(X \in U \subseteq N(x))$. Но U е околност на x, следователно $N(x) \subseteq U$. Следователно $N(X) = U$ и $N(x) \in B$.

Задача: Дали е вярно обратното твърдение — ако (X, τ) има минимална база то (X, τ) е Александровско? Не е вярно, ето контрапример:

Нека $X \leftrightharpoons \{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^+\}$.
Полагаме $U_1 \leftrightharpoons X$, а за всяко $n > 1$: $\quad U_n \leftrightharpoons X \setminus \{1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n-1}\}$.
Тогава $\tau \leftrightharpoons \{U_n \mid n \in \mathbb{N}^+\} \cup \{\emptyset\}$ е топологично пространство, но не е Александровско, защото $\bigcap_{n \in \mathbb{N}^+} U_n = \{0\}$, което не е отворено множество.

Имаме $U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \dots$ (като никъде няма равенство).

Нека $B \leftrightharpoons \tau \setminus \{\emptyset\}$. Очевидно B е база. Нека B' е произволна база. Ще докажем, че $B \subseteq B'$.

Нека $U_n \in B$. Да допуснем, че $U_n \notin B'$. Имаме $\frac{1}{n} \in U_n$, следователно $(\exists V \in B')(\frac{1}{n} \in V \subseteq U_n)$. Нека $V = U_m$.

- Ако $m < n$, то $U_m \supset U_n$, което е противоречие с $U_m \subseteq U_n$.
- Ако $m > n$, то според дефиницията на U_m, $\frac{1}{n} \notin U_m$, което също е противоречие.
- Ако $m = n$, то имаме $V = U_m = U_n \in B'$, което отново е противоречие.

Следователно $U_n \in B'$ и $B \subseteq B'$. Следователно B е минимална база на (X, τ). Тогава единствената друга база е самото τ.

Задача: Докажете, че $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ест}})$ няма най-малка база.

Задача: Да се докаже, че $B \risingdotseq \{(r,s) \mid r,s \in \mathbb{Q}, r < s\}$ е база на $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ест}})$.

Нека $x \in \mathbb{R}$ е произволно и U е произволна околност на x. Тогава $(\forall x \in U)(\exists \varepsilon > 0)((x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U)$. Нека ε има това свойство за избраното вече x. Тоест нека $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Нека $y \in \mathbb{Q} \cap (x-\varepsilon, x)$ и $z \in \mathbb{Q} \cap (x, x+\varepsilon)$. Тогава $x \in (y,z) \in B$ и $(y,z) \subseteq (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subseteq U$. Следователно B е база (твърдение 8).

Всеки елемент на B се определя еднозначно от двойката от рационални числа r и s, следователно $|B| \leq |\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}| = \aleph_0$. Разбира се, B е безкрайно, следователно $|B| = \aleph_0$.

Така получихме, че $\omega(\mathbb{R}, \tau_{\text{ест}}) \leq \aleph_0$. Да разгледаме фамилията от отворени множества $P = \{(n-0.25, n+0.25) \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq \tau_{\text{ест}}$. Очевидно това е безкрайна и дизюнктна фамилия. Според твърдение 8, ако B е база, то за всеки елемент $p \in P$ съществува $V \in B$, такова че $V \subseteq p$, следователно B е безкрайно множество.

Следователно $\omega(\mathbb{R}, \tau_{\text{ест}}) = \aleph_0$.

6 Предбаза на тп ...

Дефиниция. *Нека X е множество и $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. Полагаме $FI(P)$ да бъде семейството на всички крайни сечения на елементите на P. Тоест:*

$$FI(P) \leftrightharpoons \{\cap Z \mid Z \subseteq P, Z \text{ е крайно } \}$$

.

Твърдение 12. *$P \subseteq FI(P)$ и $FI(FI(P)) = FI(P)$.*

Нека $A \in P$. Тогава A се представя във вида $\cap\{A\}$, като $\{A\} \subseteq P$, следователно $A \in FI(P)$. Следователно $P \subseteq FI(P)$ и оттам $FI(P) \subseteq FI(FI(P))$.

Нека $A \in FI(FI(P))$. Тогава A се представя във вида $A = \bigcap_{i=1}^{k} A_i$, където $A_i \in FI(P)$ (за всяко $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$). Тогава за всяко i, $A_i = \bigcap_{j=1}^{k_i} B_{i_j}$, където $B_{i_j} \in P$. Тогава $A = \bigcap_{i=1}^{k} \bigcap_{j=1}^{k_j} B_{i_j}$, което е крайно сечение на елементи на P, следователно $A \in FI(P)$. Следователно $FI(FI(P)) \subseteq FI(P)$.

Следователно $FI(P) = FI(FI(P))$. □

Дефиниция. *Нека (X, τ) е т.п. и $P \subseteq \mathcal{P}(X)$. Казваме, че P е предбаза на (X, τ), ако $FI(P)$ е база на (X, τ).*

Факт. *Нека P е предбаза на т.п. (X, τ). Тогава $P \subseteq \tau$.*

Имаме $P \subseteq FI(P) \subseteq \tau$, защото $FI(P)$ е база.

Факт. *Всяка база на т.п. (X, τ) е предбаза.*

Защото всяко разширение на една база също е база (стига да не напуска τ).

Твърдение 13. *Нека P е предбаза на т.п. (X, τ). Тогава $\cup P = X$.*

$\cup FI(P) = X$, защото $FI(P)$ е база. Нека $s \in \cup FI(P)$. Тогава съществува крайно $A \subseteq P$, $s \in \cap A$. Следователно $s \in \cup P$ и $\cup FI(P) \subseteq \cup P$. Но $P \subseteq FI(P)$, следователно $\cup P \subseteq \cup FI(P)$. Следователно $\cup P = \cup FI(P)$.

Теорема 2. *Нека X е множество и $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ е покритие на X. Тогава $FI(P)$ удовлетворява (B1) и (B2) и следователно поражда топология τ в X, за която $FI(P)$ е база. Тогава P е предбаза на τ и τ се нарича топология в X породена от „предбазата“ P.*

(B1) е изпълнено, защото $\cup P = X$ (P е покритие) и $\cup FI(P) = \cup P$ (доказва се като в миналото твърдение)

Нека $U, V \in FI(P)$. Тогава $U \cap V \in FI(P)$, защото U и V са крайни сечения на елементи на P. Тогава самото $U \cap V$ има свойствата на W от (B2).

Пример: Нека X е безкрайно множество и $x_0 \in X$. Полагаме O_{x_0} да бъде топологията в X породена от (предбазата)

$$\{X \setminus \{x\} \mid x \in X\} \cup \{\{x\} \mid x \in X \setminus \{x_0\}\}$$

Дефиниция. *Едно ч.н.м.* $(X, \leq)$ *се нарича решетка, ако има най-голям и най-малък елемент*[9] *и за всеки два елемента* $a, b \in X$ *съществуват* $\inf\{a, b\}$ *и* $\sup\{a, b\}$ *(които се означават съответно с* $a \wedge b$ *и* $a \vee b$ *и се наричат още съответно meet и join). Най-големият елемент се нарича единица, а най-малкият —нула. Означаваме ги съответно* 1 *и* 0.

Дефиниция. *Едно ч.н.м.* $(X, \leq)$ *се нарича пълна решетка ако за произволно* $X' \subseteq X$ *съществуват* $\inf X'$ *(означаваме* $\bigwedge X'$*) и* $\sup X'$ *(означаваме* $\bigvee X'$*).*

За пълните решетки имаме $\inf\emptyset = 1$ и $\sup\emptyset = 0$.

Твърдение 14. *Нека* X *е множество. Тогава фамилията от всички топологии в* X *−* $\mathrm{Top}(X)$ *− образува пълна решетка с наредбата* $\leq$[10].

Нека $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \mathrm{Top}(X)$.

Полагаме $\tau \leftrightharpoons \bigcap\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$. Тогава $\tau \in \mathrm{Top}(X)$ и τ е inf на фамилията $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$. Аксиомите се проверяват директно:

- (O1) За всяко $\alpha \in A$, τ_α е топология в X, следователно $\emptyset, X \in \tau_\alpha$. Следователно $\emptyset, X \in \tau$.
- (02) Ако $U, V \in \tau$, то $U, V \in \tau_\alpha$ за всяко $\alpha \in A$ и понеже τ_α са топологии, $U \cap V \in \tau_\alpha$. Това е за произволно $\alpha \in A$, следователно $U \cap V \in \tau$.
- (O3) Ако $\mathcal{U} \subseteq \tau$, то $\mathcal{U} \subseteq \tau_\alpha$ за всяко $\alpha \in A$, следователно $\cup\mathcal{U} \in \tau_\alpha$, следователно $\cup\mathcal{U} \in \tau$.

Това е инфимум — нека τ' е такава топология, че за всяко $\alpha \in A$ $\tau' \subseteq \tau_\alpha$. Тогава очевидно $\tau' \subseteq \tau$.

Супремум на $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$ е топологията в X, породена от предбазата $P = \bigcup\limits_{\alpha\in A} \tau_\alpha$. Очевидно $\cup P = X$ и от миналата теорема следва, че P поражда топология τ в X, за която P е предбаза. Ще проверим, че τ е най-малката мажоранта на $\{\tau_\alpha \mid \alpha \in A\}$.

За всяко $\alpha \in A$ имаме $\tau_\alpha \subseteq P \subseteq FI(P) \subseteq \tau$, следователно τ наистина е мажоранта.

Нека τ' е произволна мажоранта на нашата фамилия, тоест за всяко $\alpha ßA \quad \tau_\alpha \subseteq \tau'$. Тогава $P \subseteq \tau'$. Но τ' е топология, следователно е затворена относно крайни сечения, следователно $FI(P) \subseteq \tau'$. Но $FI(P)$ по построение е база на τ, следователно всеки елемент на τ има вида $U = \cup B$, където $B \in FI(P)$. Тогава това $U \in \tau'$ заради аксиома (02) за τ'. Следователно τ е най-малката мажоранта.

[9] В други дефиниции на решетка това свойство не се изисква

[10] Това е наредбата съвпадаща с $\subseteq$, дефинирана по-рано

Пример: Нека $P = (X, \leq)$ е ч.н.м.

Полагаме $\Phi(P)$ да бъде топологията в X, породена от предбазата $\{X \setminus \downarrow x \mid x \in X\} \cup \{X\}$. Тя се нарича дясноинтервална топология в P.

Аналогично дефинираме лявоинтервална топология в P — $\Omega(P)$ — породена от предбазата $\{X \setminus \uparrow x \mid x \in X\} \cup \{X\}$.

Топология на Лоусън в P — топологията $\Lambda(P) \leftrightharpoons \Omega(P) \vee \Sigma(P)$

7 Локални бази и базисни системи от околности ...

Нека (X, τ) е т.п. и $x \in X$.

Дефиниция. *Нека $B_x \subseteq \tau$. Казваме, че B_x е локална база на (X, τ) в точката x, ако $B(x)$ е множество от околности на x и за всяка околност U на x съществува $V \in B_x$, такова че $x \in V \subseteq U$.*

Дефиниция. *Характер на пространството (X, τ) в точката x наричаме кардиналното число $\chi(x, X) \leftrightharpoons \min\{|B_x| \mid B_x$ е локална база в x за $(X, \tau)\}$.*

Дефиниция. *Характер на пространството (X, τ) наричаме кардиналното число $\chi(X) \leftrightharpoons \sup\{\chi(x, X) \mid x \in X\}$.*

Дефиниция. *Ако $\chi(X) \leq \aleph_0$, казваме, че (X, τ) удовлетворява първата аксиома за изброимост.*
Ако $\omega(X, \tau) \leq \aleph_0$, казваме, че (X, τ) удовлетворява втората аксиома за изброимост.

Дефиниция. *Ако за всяко $x \in X$, B_x е локална база в x за (X, τ), то фамилията $\{B_x \mid x \in X\}$ се нарича базисна система от околности на (X, τ).*

Пример: Разглеждаме $(\mathbb{R}, \tau_{\text{ест}})$. За всяко $x \in X$ полагаме $B_x \leftrightharpoons \{B(x, \varepsilon) \mid \varepsilon > 0\}$.

Тогава B_x е локална база за x, следователно $\{B_x \mid x \in X\}$ е базисна система от околности.

Твърдение 15. *Нека (X, τ) е т.п. и B е база. За всяко $x \in X$ полагаме $B_x \leftrightharpoons \{U \in B \mid x \in U\}$. Тогава $\{B_x \mid x \in X\}$ е базисна система от околности на (X, τ).*

Твърдение 16. *Нека (X, τ) е т.п. и $\{B_x \mid x \in X\}$ е базисна система от околности. Тогава $B \leftrightharpoons \bigcup_{x \in X} B_x$ е база на (X, τ).*

Твърдение 17. *Нека (X, τ) е т.п. и $\{B_x \mid x \in X\}$ е базисна система от околности. Тогава:*

- *(BN1)* $(\forall x \in X)\Big(B_x \neq \emptyset$ *и* $(\forall U \in B_x)(x \in U)\Big)$
- *(BN2)* $(\forall x \in X)(\forall U, V \in B_x)(\exists W \in B_x)(W \subseteq U \cap V)$
- *(BN3)* $(\forall x, y \in X)(\forall U \in B_y)\Big(x \in U \Rightarrow (\exists V \in B_x)(V \subseteq U)\Big)$

Нека $\{B_x \mid x \in X\}$ е базисна система от околности за (X, τ).

За произволно $x \in X$, X е околност на x. Следователно съществува $V \in B_x$, такъв че $V \subseteq X$. Следователно B_x не е празно. Второто условие от (BN1) следва директно от дефиницията.

Нека $x \in X$ е произволно и $U, V \in B_x$ са произволни. Тогава U и V са околности на x, следователно $U \cap V$ е околност на x. Следователно съществува $W \in B_x$, такова че $W \subseteq U \cap V$.

Нека $x, y \in X$ и $U \in B_x$ са произволни. Нека $x \in U$. Тогава U е околност на x, следователно съществува $V \in B_x$, такова че $V \subseteq U$

Теорема 3. *Нека X е множество и за всяко $x \in X$ е зададена фамилия $B(x)$ от подмножества на X, така че да са удовлетворени (BN1), (BN2), (BN3). Тогава фамилията $B = \bigcup_{x \in X} B(x)$ удовлетворява условията (B1) и (B2) и следователно поражда топология τ в X.*

Фамилията $\{B(x) \mid x \in X\}$ се явява базисна система от околности на (X, τ) и по тази причина τ се нарича топология породена от „базисната система от околности“ $\{B(x) \mid x \in X\}$

Нека $x \in X$ е произволно. Тогава от (BN1) получаваме, че $B(x) \neq \emptyset$, тоест $\exists U \in B(x)$ и тогава $x \in U$. Следователно $x \in \cup B$ и $\cup B = X$ — (B1).

Нека $U, V \in B$ и $x \in U \cap V$ са произволни. Тогава $U \in B(y)$ и $V \in B(z)$ за някакви $y, z \in X$ (според дефиницията на B). Така получаваме $x \in U \in B(y)$, следователно (от (BN3)) $(\exists U_1 \in B(x))(U_1 \subseteq U)$. Аналогично $(\exists V_1 \in B(x))(V_1 \subseteq V)$. Тогава от (BN2) получаваме $(\exists W \in B(x))(W \subseteq U_1 \cap V_1)$.

Тогава $W \in B$, $x \in W \subseteq U_1 \cap V_1 \subseteq U \cap V$, следователно е в сила (B2).

Следователно B удовлетворява (B1) и (B2) и от миналата теорема следва, че B поражда топология τ в X, за която B е база. Остава да докажем, че $\{B(x) \mid x \in X\}$ е базисна система от околности, тоест че за всяко $x \in X$, $B(x)$ е локална база на (X, τ) в точката x.

Нека $x \in X$ е произволно и U е произволна околност на x. Тогава $(\exists V \in B)(x \in V \subseteq U)$. Но $V \in B$ значи, че $V \in B(y)$ за някое $y \in X$. Тогава $x \in V \in B(y)$ и от (BN3) следва, че $(\exists W \in B(x))(W \subseteq V)$. Следователно $x \in W \subseteq V \subseteq U$ и $W \in B(x)$. И понеже от (BN1) следва, че $B(x)$ е множество от околности на x, то $B(x)$ е локална база в x.

Дефиниция. *Едно т.п (X, τ) се нарича хаусдорфово (или T_2 пространство) ако е в сила:*

$$(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists U, V \in \tau)(x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset)$$

Ако множествата $B(x)$ за $x \in X$ от теоремата удовлетворяват следната допълнителна аксиома, то полученото пространство е хаусдорфово:

- (BN4) $(\forall x, y \in X, x \neq y)(\exists U \in B(x), V \in B(y))(U \cap V = \emptyset)$

Факт. *$(\mathbb{R}^n, \tau_{ecm})$ е хаусдорфово пространство.*

Факт. *Едно крайно т.п. е хаусдорфово точно когато е дискретното.*

Нека (X, τ) е хаусдорфово, като X е крайно. За всяко $y \in X, y \neq x$ има околност U_y на x, която не съдържа y. Тогава $\cap\{U_y | y \in X \setminus \{x\}\} = \{x\}$. Но това е крайно сечение на отворени множества, следователно $\{x\}$ е отворено. Следователно (X, τ) е дискретно.

Теорема 4. *Нека X е множество и за всяко $x \in X$ е зададено $U_x \subseteq X$, така че:*

- *(BA1)* $(\forall x \in X)(x \in U_x)$
- *(BA2)* $(\forall x, y \in X)(x \in U_y \Rightarrow U_x \subseteq U_y)$

Полагаме за всяко $x \in X \quad B(x) \leftrightharpoons \{U_x\}$. Тогава фамилията $\{B(x) \mid x \in X\}$ удовлетворява (BN1)–(BN3), следователно поражда топология в X, за която $\{B(x) \mid x \in X\}$ е базисна система от околности. Нека $B \leftrightharpoons \bigcup\limits_{x \in x} B(X) = \{U_x \mid x \in X\}$. Тогава (X, τ) е Александровско пространство и B е неговата минимална база.

- (BN1) Следва директно от (BA1).
- (BN2) Изпълнено е, защото $B(x)$ са едноточкови.
- (BN3) Следва директно от (BA2).

За всяко $x \in X$ имаме (според твърдение 10) $N(x) = \cap\{U \in B \mid x \in U\} = \cap\{U_y \mid y \in X, x \in U_y\}$. Но от (BA2) имаме, че $U_x \subseteq U_y$ когато $x \in U_y$ следователно $U_x \subseteq \cap\{U_y \mid y \in X, x \in U_y\}$. От друга страна $\cap\{U_y \mid y \in X, x \in U_y\} \subseteq U_x$, защото при $y = x$ имаме $U_y = U_x$. Така $N(x) = U_x$.

Следователно $N(x)$ е отворено за произволно $x \in X$, следователно (от следващото твърдение) (X, τ) е Александровско пространство. Следователно то има най-малка база $B_x = \{N(x) \mid x \in X\}$, но това е точно $\{U_x \mid x \in X\} = B$

Твърдение 18. [11] *Едно т.п. (X, τ) е Александровско т.с.т.к. за всяко $x \in X$ е в сила $N(x) \in \tau$.*

$\rightarrow$) Очевидно, тьй като $N(x)$ е сечение на елементи на τ.

$\leftarrow$) Нека за всяко $x \in X \quad N(x) \in \tau$ и нека $\mathcal{U} = \{U_\alpha \mid \alpha \in A\} \subseteq \tau$ е произволна подфамилия на τ. Ще докажем равенството

$$\cap\mathcal{U} = \cup\{N(z) \mid (\forall \alpha \in A)(z \in U_\alpha)\}$$

откъдето следва, че $\cap\mathcal{U} \in \tau$, защото неговото равно е обединение на подфамилия на τ и следователно е от τ.

Нека $y \in \cap\mathcal{U}$. Тогава за всяко $\alpha \in A$, $y \in U_\alpha$. И понеже $y \in N(y)$, то $y \in \cup\{N(z) \mid (\forall \alpha \in A)(z \in U_\alpha)\}$.

Нека сега $y \in \cup\{N(z) \mid (\forall \alpha \in A)(z \in U_\alpha)\}$. Тогава $y \in N(z)$ за някое z, за което $(\forall \alpha \in \alpha)(z \in U_\alpha)$. Нека $\alpha \in A$ е произволно. Тогава $z \in U_\alpha \in \tau$ и следователно $N(z) \subseteq U_\alpha$. Следователно $y \in U_\alpha$ (за произволно $\alpha \in A$), следователно $y \in \cap\mathcal{U}$.

Следователно $\cap\mathcal{U} = \cup\{N(z) \mid (\forall \alpha \in A)(z \in U_\alpha)\}$.

[11] Това не сме го доказвали, но го използвахме в миналото доказателство

Пример: Права на Халински (дигитална права).

За всяко $n \in \mathbb{Z}$ полагаме $U_n \coloneqq \begin{cases} \{n\} & n = 2k \\ \{n-1, n, n+1\} & n = 2k+1 \end{cases}$

Фамилията $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ удовлетворява (BA1) (очевидно) и (BA2):

Нека $x, y \in \mathbb{Z}$ и $x \in U_y$.

1. Ако y е четно, то $U_y = \{y\}$, следователно $x = y$ и $U_x \subseteq U_y$.
2. Ако y е нечетно
   (а) Ако x е нечетно, то $x = y$
   (б) Ако x е четно, то или $x = y - 1$ или $x = y + 1$. И в двата случая $U_x \subseteq U_y$

По теоремата тази фамилия поражда топология $\mathcal{K}$ в $\mathbb{Z}$ и $\{U_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ е нейна най-малка база.

8 Затворени множества ...

Дефиниция. *Нека (X, τ) е т.п. Едно подмножество $F \subseteq X$ се нарича затворено подмножество на (X, τ), ако $X \setminus F \in \tau$*

С $\mathcal{F}_\tau$ означаваме фамилията от всички затворени подмножества на (X, τ).

Твърдение 19. *Нека (X, τ) е т.п. Тогава $\mathcal{F}_\tau$ има следните свойства:*

- *(C1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}_\tau$*
- *(C2) Ако $F, G \in \mathcal{F}_\tau$, то $F \cup G \in \mathcal{F}_\tau$*
- *(C3) Ако $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_\tau$, то $\cap\mathcal{F}' \in \mathcal{F}_\tau$*

(C1) е очевидно.

Нека $F, G \in \mathcal{F}_\tau$, тоест $X \setminus F, X \setminus G \in \tau$. Но $X \setminus (F \cup G) = (X \setminus F) \cap (X \setminus G) \in \tau$.

Нека $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_\tau$. Тогава $X \setminus \cap\mathcal{F}' = \cup\{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}'\} \in \tau$, защото $X \setminus F \in \tau$. Следователно $\cap\mathcal{F}' \in \mathcal{F}_\tau$.

Теорема 5. *Нека X е множество и $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ удовлетворява (C1), (C2) и (C3).*

Тогава $\tau \coloneqq \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$ е топология в X и $\mathcal{F}_\tau = \mathcal{F}$. τ се нарича топология в X породена от „фамилията от затворени множества“ $\mathcal{F}$.

Аксиомите (O1)–(03) се показват аналогично на (C1)–(C3) от миналото твърдение.

$\mathcal{F}_\tau = \{X \setminus U \mid U \in \tau\} = \{F \mid F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{F}$.

Пример: Нека X е безкрайно множество. Полагаме $\mathcal{F} = \{X\} \cup \{F \subset X \mid F$ е крайно$\}$. Тогава $\mathcal{F}$ удовлетворява (C1)–(C3). Породената от него топология се нарича кофинитна топология на X.

Дефиниция. *Едно т.п. (X, τ) се нарича T_1-пространство ако:*

$$(\forall x \in X)(\{x\} \in \mathcal{F}_\tau)$$

Твърдение 20. *Всяко T_2-пространство (X, τ) е T_1-пространство.*

Нека $x \in X$. Ще докажем, че $X \setminus \{x\}$ е отворено.

Нека $y \in X \setminus \{x\}$ е произволно. По дефиницията на T_2-пространство $(\exists U, V \in \tau)(x \in U, y \in V, U \cap V = \emptyset)$. Тогава $x \notin V$, следователно $V \subseteq X \setminus \{x\}$. Следователно $y \in V \subseteq X \setminus \{x\}$. Следователно (по твърдение 1) $X \setminus \{x\}$ е отворено.

Пример: Обратното твърдение не е вярно — кофинитното пространство (X, τ) (където X е безкрайно) е T_1-пространство, но не е T_2.

Очевидно пространството е T_1, защото за всяко $x \in X, \quad \{x\}$ е крайно множество, следователно е затворено.

Ще докажем, че в (X, τ) всеки две (непразни) отворени множества се пресичат [12].

Нека $U, V \in \tau$ са произволни непразни. Ако $U = X$ или $V = X$, то очевидно $U \cap V \neq \emptyset$. Нека $U, V \neq X$. Тогава $U = X \setminus F, V = X \setminus G$ за някакви крайни $F, G \subset X$. Тогава $U \cap V = X \setminus (F \cup G)$, но X е безкрайно, а $F \cup G$ е крайно, следователно $U \cap V \neq \emptyset$.

[12] Пространства с това свойство се наричат анти-хаусдорфови

9 Затворена обвивка ...

Дефиниция. *Нека* (X, τ) *е т.п. и* $A \subseteq X$*. Полагаме*

$$\mathcal{F}(A) \risingdotseq \{F \in \mathcal{F}_\tau \mid A \subseteq F\}$$

Множеството $\bar{A} \risingdotseq \cap\mathcal{F}(A)$ *се нарича затворена обвивка на* A *в* (X, τ)*.*

Твърдение 21. *Нека* (X, τ) *е т.п. и* $A \subseteq X$*. Тогава:*

1. $A \subseteq \bar{A}, \bar{A} \in \mathcal{F}_\tau$.
2. $\bar{A}$ *е най-малкото затворено, съдържащо* A*.*
3. A *е затворено т.с.т.к.* $A = \bar{A}$*.*

Доказателство:

1. $\bar{A} = \cap\mathcal{F}(A)$ и по дефиницията на $\mathcal{F}(A)$ за всяко $Z \in \mathcal{F}(A) \quad A \subseteq Z$. Имаме $\mathcal{F}(A) \subseteq \mathcal{F}_\tau$, следователно (от (C3)) $\bar{A} = \cap\mathcal{F}(A) \in \mathcal{F}_\tau$.
2. $\bar{A} \in \mathcal{F}(A)$ и $\bar{A} = \cap\mathcal{F}(A)$
3. Нека A е затворено. Тогава $A \in \mathcal{F}(A)$, следователно $\bar{A} \subseteq A$. Вече видяхме, че $A \subseteq \bar{A}$, следователно $A = \bar{A}$.

   Нека $A = \bar{A}$. Тогава от първата точка следва, че A е затворено.

Дефиниция. *Нека* (X, τ) *е т.п.,* $x \in X, A \subseteq X$*. Казваме, че* x *е близко до* A*, ако* $x \in \bar{A}$*.*

Ще разглеждаме $\bar{\ }$ като оператор от $\mathcal{P}(X)$ в $\mathcal{P}(X)$. Ще го наричаме оператор за близост.

Твърдение 22. *Нека* (X, τ) *е т.п.,* $A, B \subseteq X$ *и* $A \subseteq B$*. Тогава* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$

Ако $F \in \mathcal{F}(B)$, то $F \supseteq B \supseteq A$, следователно $F \in \mathcal{F}(A)$. Тогава $\mathcal{F}(B) \subseteq \mathcal{F}(A)$ и от там $\cap\mathcal{F}(A) \subseteq \cap\mathcal{F}(B)$.

Лема. *Нека* (X, τ) *е т.п.,* $U \in \tau, A \subseteq X$ *и* $U \cap A = \emptyset$*. Тогава* $U \cap \bar{A} = \emptyset$*.*

$A \subseteq X \setminus U$, но $X \setminus U \in \mathcal{F}_\tau$, следователно $X \setminus U \in \mathcal{F}(A)$, следователно $\bar{A} \subseteq X \setminus U$.

Следствие: ако $U, V \in \tau$ и $U \cap V = \emptyset$, то $U \cap \bar{V} = \bar{U} \cap V = \emptyset$.

Следствие: ако $x \in U$ и $x \in \bar{A}$, то $U \cap A \neq \emptyset$.

Лема. *Нека* (X, τ) *е т.п.,* $A \subseteq X$ *и* $x \in X$*. Тогава следните условия са еквивалентни:*

1. $x \in \bar{A}$
2. *За всяка локална база* $B(x)$ *в* x *и за всяка околност* $U \in B(x) \quad U \cap A \neq \emptyset$

3. *Съществува локална база $B(x)$ в x, такава че за всяка околност $U \in B(x) \quad U \cap A \neq \emptyset$*

$1 \to 2$. Нека $x \in \bar{A}$, $B(x)$ е произволна локална база в x и $U \in B(x)$. Да допуснем, че $U \cap A = \emptyset$. Тогава (по миналата лема) $U \cap \bar{A} = \emptyset$. Но $x \in \bar{A}$ и $x \in U$ — противоречие.

$2 \to 3$. Тук само трябва да покажем, че съществува локална база в x — $\tau(x) \leftrightharpoons \{U \in \tau | x \in U\}$ е такава.

$3 \to 1$. Да допуснем, че $x \notin \bar{A}$. Тогава $x \in X \setminus \bar{A}$. Понеже $\bar{A} \in \mathcal{F}_\tau$ имаме $X\ \bar{A} \in \tau$. Тогава $B(x)$ е локална база в x, а $X \setminus \bar{A}$ е околност на x, следователно съществува $U \in B(x)$, такова че $U \subseteq X \setminus \bar{A}$. Тогава $U \cap \bar{A} = \emptyset$ и понеже $A \subseteq \bar{A}$, то $U \cap A = \emptyset$ — противеречие с условие 3.

Твърдение 23. *Нека (X, τ) е т.п. и $A, B \subseteq X$. Тогава:*

- *(CO1)* $\bar{\emptyset} = \emptyset$
- *(CO2)* $A \subseteq \bar{A}$
- *(CO3)* $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- *(CO4)* $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Доказателство:

- (CO1) $\emptyset \in \mathcal{F}_\tau$, следователно $\bar{\emptyset} = \emptyset$
- (CO2) вече доказано
- (CO3) $A \subseteq A \cup B$, следователно $\bar{A} \subseteq \overline{A \cup B}$. Аналогично $\bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Тогава $\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Имаме още, че $A \subseteq \bar{A}$ и $B \subseteq \bar{B}$, следователно $A \cup B \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$. Но $\bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{F}_\tau$, следователно $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{F}_\tau$. Тогава $\bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{F}(A \cup B)$, следователно $\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cup \bar{B}$.
- (CO4) Имаме $\bar{A} \in \mathcal{F}_\tau$, следователно (по първото твърдение от въпроса) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

Дефиниция. *Нека X е множество и $^{-} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$. Ако $^{-}$ удовлетворява (C01)-(CO3), то $^{-}$ се нарича оператор на Чех. Ако удовлетворява също (CO4) не нарича оператор на Куратовски.*

Не всеки оператор на Чех е оператор на Куратовски (не сме дали пример).

Теорема 6. *Нека X е множество и $\tilde{}: \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ е оператор на Чех. Тогава $\tau \leftrightharpoons \{X \backslash A \mid A \subseteq X, A = \tilde{A}\}$ е топология в X. Нека $^{-}$ е операторът на затворена обвивка на (X, τ). Тогава $(\forall A \subseteq X)(\tilde{A} \subseteq \bar{A})$. Ако $\tilde{}$ е оператор на Куратовски, то $(\forall A \subseteq X)(\tilde{A} = \bar{A})$. Тогава казваме, че (X, τ) е топология в X, породена от „оператора на затворена обвивка“ $\tilde{}$.*

Доказателство: Нека $\mathcal{F} \leftrightharpoons \{A \subseteq X \mid A = \tilde{A}\}$. Тогава $\tau = \{X \setminus F \mid F \in \mathcal{F}\}$. Ще докажем, че $\mathcal{F}$ има свойствата (C1)-(C3).

- (C1) От (CO1) имаме, че $\emptyset = \tilde{\emptyset}$, следователно $\emptyset \in \mathcal{F}$. От (CO2) имаме $X \subseteq \tilde{X}$, следователно $X = \tilde{X}$ и $X \in \mathcal{F}$.
- (C2) Нека $F = \tilde{F}$ и $G = \tilde{G}$. Тогава от (CO3) $\widetilde{F \cup G} = \tilde{F} \cup \tilde{G} = F \cup G$
- (C3) Нека $A \subseteq B \subseteq X$. Тогава $A \cup B = B$ и от (CO3) $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \widetilde{A \cup B} = \tilde{B}$. Следователно $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

  Нека сега $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$ и $F \cap \mathcal{F}'$. За всяко $F' \in \mathcal{F}'$ имаме $F' = \widetilde{F'}$ и $F \subseteq F'$. Следователно $\tilde{F} \subseteq \widetilde{F'} = F$. Това е за всяко $F' \in \mathcal{F}'$, следователно $\tilde{F} \subseteq F$. Но от (CO2) имаме $F \subseteq \tilde{F}$, следователно $F = \tilde{F}$, или $F \in \mathcal{F}$.

След като имаме, че $\mathcal{F}$ удовлетворява (C1)-(C3), по миналата теорема получаваме, че τ е топология в X и $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\tau$. Остава, да видим, че за операторът на затворена обвивка $^-$ в (X, τ) имаме $\tilde{A} \subseteq \bar{A}$ за всяко $A \subseteq X$.

Нека $A \subseteq X$. Тогава $\bar{A} = \cap\mathcal{F}(A) = \cap\{F \in \mathcal{F} \mid A \subseteq F\}$. Нека $F \in \mathcal{F}(A)$. Тогава $A \subseteq F$ и $\tilde{F} = F$. От (CO2) получаваме $\tilde{A} \subseteq F$. Следователно $A \subseteq \cap\mathcal{F}(A) = \bar{A}$.

Нека $\tilde{}$ е оператор на Куратовски, и нека $A \subseteq X$ е произволно. Имаме $\tilde{\tilde{A}} = \tilde{A}$. Тоест $\tilde{A} \in \mathcal{F}$. От (CO2) $A \subseteq \tilde{A}$ и тогава $\tilde{A} \in \{F \in \mathcal{F} \mid A \subseteq F\}$. Но по дефиниция $\bar{A} = \cap\{F \in \mathcal{F} \mid A \subseteq F\}$, следователно $\bar{A} \subseteq \tilde{A}$. Следователно $\bar{A} = \tilde{A}$. □

Следствие: Нека X е множество. Тогава съществува биективно съответствие между $\mathrm{Top}(X)$ и множеството на всички оператори на Куратовски в $\mathcal{P}(X)$. То се получавам, като на всяка топология τ в X съпоставим операторът за затворена обвивка — това е оператор а Куратовски. Обратно, на всеки оператор на Куратовски съпоставяме топологията от теоремата. Доказва се, че композициите на двете изображения са идентитетите, откъдето следва, че те са биекции.

Твърдение 24. *Нека (X, τ) е т.п. Тогава (X, τ) е александровски т.с.т.к. $(\forall A \subseteq X)(\bar{A} = \cup\{\bar{a} \mid a \in A\})$*[13]

$\rightarrow$) Нека (X, τ) е александровско и $A \subseteq X$. Нека $x \in \bar{A}$. Тогава $N(x)$ е околност на x, следователно (следствие от лемата) $N(x) \cap A \neq \emptyset$. Нека $a \in N(x) \cap A$. Тогава a принадлежи на всяка околност на x, следователно $x \in \bar{a}$. Това е в сила за произволно $x \in \bar{A}$, следователно $\bar{A} \subseteq \cup\{\bar{a} \mid a \in A\}$.

Понеже $\{a\} \subseteq A$ получаваме $\bar{a} \subseteq \bar{B}$.

$\leftarrow$) Нека е изпълнено второто условие. Ще докажем, че обединението на произволна фамилия от затворени множества е затворено, откъдето следва, че сечението на произволна фамилия от отворени множества е отворена, тоест, че (X, τ) е александровско.

[13] Тук означаваме $\bar{a} = \overline{\{a\}}$

Нека $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}_\tau$, нека $F = \cup\mathcal{F}'$. Ще докажем, че $F = \bar{F}$.

Нека $x \in \bar{F}$. Имаме, че $\bar{F} = \cup\{\bar{a} \mid a \in F\}$, следователно съществува $a \in F$, такова че $x \in \bar{a}$. Тогава съществува $G \in \mathcal{F}'$ (което е затворено) за което $a \in G$. Тогава $G = \bar{G}$ и $\{a\} \subseteq G$, следователно $\bar{a} \subseteq \bar{G}$. Освен това $G \subseteq F$. Накрая получаваме $x \in \bar{a} \subseteq F$. Следователно $\bar{F} \subseteq F$. Следователно $\bar{F} = F$ и тогава F е затворено.

Това твърдение показва, че за александровските пространства е достатъчно да се зададат затворените обвивки само на точките, тоест една функция от X в $\mathcal{P}(X)$, вместо от $\mathcal{P}(X)$ в $\mathcal{P}(X)$.

Теорема 7. *Нека X е множество и за всяко $x \in X$ е зададено $cl(x) \subseteq X$, така че:*

- *(AO1) За всяко $x \in X, x \in cl(x)$*

Тогава, полагайки $\bar{A} \leftrightharpoons \cup\{cl(a) \mid a \in A\}$ за всяко $A \subseteq X$ получаваме оператор на Чех. Операторът $\bar{\ }$ е оператор на Куратовски т.с.т.к. е изпълнено още следното условие:

- *(AO2) $(\forall x, y \in X)(x \in cl(y) \Rightarrow cl(x) \subseteq cl(y))$*

Когато cl удовлетворява (AO1) и (AO2) породеното топологично пространство е александровско. Обратно, всяко александровско т.п. може да се зададе по този начин.

Доказателство: (CO1) и (CO2) следват директно от дефиницията на $\bar{\ }$.

Нека $A, B \subseteq X$. Тогава $\bar{A} \cup \bar{B} = \cup\{cl(a) \mid a \in A\} \cup \cup\{cl(b) \mid b \in B\} = \cup\{cl(c) \mid c \in A \cup B\} = \overline{A \cup B}$

Следователно $\bar{\ }$ е оператор на Чех.

Ако $\bar{\ }$ е оператор на Куратовски и $x \in cl(y) = \bar{y}$, то $\bar{x} \subseteq \bar{y}$, тоест $cl(x) \subseteq cl(y)$, което е точно (AO2).

Нека $\bar{\ }$ удовлетворява (AO2) и нека $A \subseteq X$. Тогава
$\bar{\bar{A}} = \cup\{cl(b) \mid b \in \bar{A}\}$

Нека $x \in \bar{\bar{A}}$. Тогава $x \in cl(b)$ за някое $b \in \bar{A}$, тоест за някое $b \in \cup\{cl(a) \mid a \in A\}$. Тогава съществува $a \in A$, такова че $b \in cl(a)$ и от (AO2) имаме $cl(b) \subseteq cl(a)$. Тогава $x \in cl(a)$. Така видяхме, че ако $x \in \bar{\bar{A}}$, то съществува $a \in A$, че $x \in cl(a)$. Тоест $x \in \cup\{cl(a) \mid a \in A\}$ или $x \in \bar{A}$. Следователно $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$.

Но от вече доказаното (CO2) следва, че $\bar{A} \subseteq \bar{\bar{A}}$, следователно $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$. Тоест $\bar{\ }$ е оператор на Куратовски.

От предното твърдение следва, че пространството е александровско.

Нека (X, τ) е александровско пространство. Тогава за всяко $A \subseteq X$ от предното твърдение имаме $\bar{A} = \cup\bar{a} \mid a \in A$.

За всяко $a \in X$ полагаме $cl(a) \leftrightharpoons \bar{a}$. Тогава (AO1) очевидно е изпълнено, и ако $x \in cl(y)$, то $x \in \bar{y}$, следователно $\bar{x} \subseteq \bar{y}$, тоест $cl(x) \subseteq cl(y)$, тоест (AO2)

е изпълнено. Тогава ако означим операторът от теоремата с $^{-cl}$, то имаме равенствата (за всяко $A \subseteq X$):
$\bar{A}^{cl} = \cup\{cl(a)|a \in A\} = \cup\{\bar{a}|a \in A\} = \bar{A}$
Тоест операторът на Куратовски породен от τ съвпада с дефинираният. $\square$

Дефиниция. *Операторите* $cl : X \to \mathcal{P}(X)$ *със свойствата (AO1) и (AO2) се наричат оператори на Александров в* X.

Следствие: Нека X е множество. Тогава съществува биективно съответствие между александровските топологии в X е операторите на Александров в X.

10 T_0-пространства . . .

11 Вътрешност . . .