1. Наивна теория на множествата. Парадокс на Ръсел

В последните години едва ли е необходимо да даваме наивни пояснения за интуитивното понятие *множество*, тъй като в този смисъл то е познато още от училищния курс по математика и повсеместно се използва в университетските курсове по математика. И все пак, множество е обект, съставен от обекти, които се наричат негови елементи. С $x \in A$ се означава факта, че обектът x е елемент на множеството A, и се казва, че x принадлежи на A. Ако x не е елемент на A, се казва, че x не принадлежи на A и се използва означението $x \notin A$.

В почти същия интуитивен смисъл понятието множество се използва и от създателя на теорията на множествата Георг Кантор в последното тридесетилетие на миналия век. Изхождайки от задачи на математическия анализ, Кантор в цикъл работи разглежда множества от реални числа (в съвременна терминология) и получава забележителни в математическо отношение резултати — това, което сега наричаме Канторов метод за построяване на реалните числа; изброимост на множеството на алгебричните числа и неизброимост на множеството на реалните числа, откъдето получава смайващо просто доказателство на теоремата на Лиувил за съществуване на трансцендентни числа; равномощност на единичния квадрат и единичната отсечка и много други, които тук няма да изброяваме по ред причини. От философска гледна точка като че ли най-важна е системната работа с актуалната безкрайност — разглеждането като едно цяло, завършен обект, на резултата от безброй много актове на човешкия разсъдък. Казано по друг начин, разглеждат се множества с безбройно много елементи. (Един прост пример: да си представяме всяко естествено число като резултат от краен брой прибавяния на 1 към 0. Така безспорно можем да си представяме колекции от естествени числа, ненадминаващи кое да е фиксирано число. Обаче не така безспорна е представата за завършен обект, съдържащ всички естествени числа, т.е. за множество на всички естествени числа.)

Впоследствие Кантор преминава от разглеждане на „конкретни“ множества от реални числа към множества от произволни обекти, развива теориите на така наречените ординални числа и кардинални числа — абстрактни понятия съответно за добра наредба и количественост на произволни множества. Постепенно той достига, вероятно и под влияние на изследванията на Дедекинд, до идеята за изграждане на математиката въз основа на понятието множество. Получила широко признание на I конгрес по математика в Цюрих през 1897 г., скоро след това теорията на множествата става в известен смисъл източник за сериозна криза в основите на математиката. През 1903 г. Бертран Ръсел публикува парадокс, засягащ основите на теорията на множествата (през 1902 г. Ръсел съобщава в писмо до Готлоб Фреге за открития от него парадокс; приблизително по същото време в Гьотинген кръгът математици около Цермело обсъжда този парадокс, до който се е стигнало независимо от Ръсел). Макар значително по-рано да са забелязани парадокси (Кантор 1895–96 г., Чезаре Бурали-Форти 1897 г., Кантор 1899 г.), те не са оказали такова силно влияние като парадокса на Ръсел, защото са били така да се каже във „висшите“ клонове на теорията на множествата и е имало надежди да се избегнат.

Сега съвсем накратко ще се спрем на парадокса на Ръсел. В наивната теория на множествата има, грубо казано, прекалено голяма свобода при образуване на множества, която можем да изкажем като

Принцип за неограничената абстракция. *За всяко свойство на обекти $\mathcal{A}$ съществува множество A, чиито елементи са точно обектите, имащи свойството $\mathcal{A}$.*

Следвайки Ръсел, да разгледаме следното свойство $\mathcal{R}$:

Един обект x има свойството $\mathcal{R}$, т.е. $\mathcal{R}(x)$, точно когато $x \notin x$.

Съгласно принципа за неограничената абстракция съществува множество R, чиито елементи са точно онези обекти x, за които $\mathcal{R}(x)$. В частност, в качеството на обекта x да вземем множеството R, тогава $R \in R \iff \mathcal{R}(R)$, което предвид дефиницията на ръселовото свойство $\mathcal{R}$ става

$$R \in R \iff R \notin R.$$

Казано с думи, едно нещо е вярно точно когато то не е вярно, което е абсурдно.

Вглеждайки се в източника за парадокса — принципа за неограничената абстракция, като че ли първото нещо, което впечатлява е свободната употреба на понятието „свойство“. Обаче свойството, използвано от Ръсел, едва ли би могло да се смята за неясно и отвлечено, нямащо отношение към истинските въпроси за множества (като например свойството: x е хромичелно). Така че в случая не е това причината. Да се опитаме да си представим кои са обектите-множества, които имат ръселовото свойство. Ако си представяме, както обикновено, че множествата се строят на отделни ясно различими етапи, като на всеки етап се строят нови множества с използуване само на елементи, които са вече построени (на предишни етапи), то не би могло да се случи $x \in x$ (на етапа, на който се строи x, се използуват вече построени множества, а x все още не е построено). Казано по друг начин, всички построени множества „имат ръселовото свойство“. Евентуално някои от онези множества, от които сме започнали конструкцията, нямат ръселовото свойство. При тази представа за света на множествата ръселовото множество е „твърде голямо“ — почти всички множества са негови елементи. Впрочем и в парадоксите, забелязани от Кантор, причината като че ли е в образуването на твърде големи множества.

Има и други сериозни критики към принципа за абстракцията, свързани с така наречената „предикативност“. Да поясним съвсем накратко за какво става дума. Да си представим, че искаме да образуваме множество B с помощта на този принцип при разглеждане на свойството $\mathcal{A}$. За да решим дали да включим един обект x като елемент на B, трябва да проверим дали x има свойството $\mathcal{A}$, т.е. дали $\mathcal{A}(x)$. За да проверим обаче $\mathcal{A}$, изобщо казано е необходимо да разполагаме с всички множества, т.е. светът на множествата да е вече построен. Как например бихме могли да проверяваме, че „за всяко множество y е в сила ...“, ако по някакъв начин не познаваме всички множества или пък не знаем, че $\mathcal{A}$ удовлетворява хубавото условие верността му за вече построените множества не зависи от това какви нови множества ще построим в бъдеще.

Изход от споменатите затруднения е разглеждане на аксиоматична теория, в която не се получат подобни парадокси. Аксиоматични системи за теория на множествата има твърде много, но ние тук ще разглеждаме системата на Цермело–Френкел (като че ли най-популярната). Каква е гаранцията, че в тази система, макар известните парадоксални множества да не се получават (или поне не по същия начин), няма да могат да се образуват парадоксални множества? Активната работа на математиците от 1908 г. (появата на малко по-слаба от тази система) насам не е довела до абсурди и за жалост това е единствената сигурна гаранция. Не би ли могло по някакъв начин да се докаже непротиворечивостта на аксиоматичната система на Цермело–Френкел? Както показва една забележителна теорема на Курт Гьодел, със средствата на съвременната математика тази непротиворечивост не би могла да се докаже. Тази теорема на Гьодел е дълбок резултат от математическата логика и далеч надхвърля целите на този курс. Но все пак една основна задача в курса би могла да се погледне и като стъпка към този резултат на Гьодел — ще се убедим, че съвременната математика или поне голяма част от нея може да се развие в рамките на теорията на множествата.

2. Аксиоматична система на Цермело–Френкел — теоретико-множествени свойства

В този параграф ще започнем съдържателно аксиоматично изграждане на теорията на множествата. Както е добре известно, например от аналогичния подход към изграждане на геометрията, за основните понятия и предикати (съотношения) дефиниции не се дават. Те се поясняват с приетите за безусловно верни твърдения, наричани аксиоми. Всички твърдения се доказват по логически път с помощта на аксиомите без ни най-малко да се позоваваме на някаква интуитивна представа за основните понятия и предикати. Произволна съвкупност от обекти и съотношения между тях, за която са верни аксиомите, е равноправен кандидат за интуитивно обяснение на основните понятия и предикати. В такава съвкупност са верни всички доказани по логически път твърдения и се нарича модел на теорията. Ако в някаква теория T успеем да построим модел за теорията на множествата, то това би означавало, че в теорията T сме доказали непротиворечивостта на теорията на множествата, а това както споменахме в края на предишния параграф е невъзможно в рамките на съвременната математика.

Въпреки горните бележки, известна интуиция за основното понятие в теорията на множествата — *множество*, и основния предикат — *принадлежи*, е желателна. Да си представим света на множествата вече построен. Тогава можем да си мислим множествата поставени на етажи. На най-ниския етаж 0 е само празното множество. След всеки етаж α има непосредствено следващ го $\alpha+1$ и на него са поставени всички множества, чиито елементи (т.е. множествата, които му принадлежат) са от по-долни етажи, но поне един от елементите му е от етажа α. Колко са и как изглеждат етажите по отношение на наредбата „е по-висок от“? Колко са етажите е в известен смисъл неуместен въпрос, както ще изясним доста по-късно (освен ако не се задоволяваме с невъзпитан отговор от типа на „умопомрачително много“). Значително по-лесен е въпросът за наредбата на етажите: тя е транзитивна, линейна (всеки два са сравними по височина), всяка съвкупност от поне един етаж има най-нисък етаж, няма последен етаж, има етажи, по-ниско от които са безброй много етажи. Разбира се, че това не е достатъчно изчерпателен списък на свойствата на етажите (и този въпрос го отлагаме за по-нататък). От тези свойства можем да заключим например, че има поне един етаж който не е непосредствено по-висок от никой друг — достатъчно е да си мислим да речем за съвкупността на етажите, по-ниско от които има безброй много други, и да разгледаме най-ниския етаж от нея. Такива етажи ще наричаме гранични. На всеки граничен етаж се намира само едно множество — неговите елементи са всички множества от по-ниските етажи.

Колкото и неясно да е засега описанието на света на множествата, полезно е след формулирането на всяка от аксиомите да се опитваме да разберем защо тя е вярна, ако действително светът изглежда така, или да видим каква нова информация за това разслояване ни дава тя. Така че по-нататък ще си мислим за един фиксиран модел на теорията на множествата, който ще означаваме с $\mathbb{V}$ и ще си го представяме разслоен по описания начин.

Каквато е обичайната математическа практика, ще използваме *променливи* за означаване на произволни, неспецифицирани множества — латински и готически букви и първите букви от гръцката азбука α, β, γ, δ, главни и малки, евентуално с горни и долни индекси.

Основният предикат в теорията на множествата „принадлежи на“, или още „е елемент на“, ще означаваме с $\in$. Така най-простото *теоретико множествено свойство* е $x \in y$. За някои конкретни множества x и y то е вярно, а за други не е. То е свойство за x и y, взети в този ред.

Друго просто теоретико множествено свойство е *равенството*, $x = y$. Смисълът, който влагаме в свойството равенство е също обичайният за математиката — за две конкретни множества, означени съответно с x и y, то е вярно, ако тези множества са идентични (съвпадат). Влагайки този смисъл в равенството, непосредствено съобразяваме, че са в сила:

1) $x = x$;
2) Ако $x = y$, то $y = x$;
3) Ако $x = y$ и $y = z$, то $x = z$;
4) Ако $x \in y$ и $y = z$, то $x \in z$;
5) Ако $x = y$ и $y \in z$, то $x \in z$.

За означаване на теоретико множествени свойства ще използваме предимно гръцките букви φ, ψ и χ, евентуално с индекси. В скоби след свойствата ще изреждаме променливите, които се срещат в тях, например $\varphi(x_1, x_2, u_1, u_2, u_3)$. По-сложни теоретико множествени свойства ще строим с обичайните логически конструкции: „не е вярно φ“; „φ и ψ“; „φ или ψ“; „ако φ, то ψ“; „φ точно тогава, когато ψ“.

Ясно е, че ако едно свойство χ е получено по горните правила за образуване на по-сложни свойства от $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\psi(y_1, y_2, \ldots, y_k)$, то χ е свойство на $z_1, \ldots, z_m$, където $z_1, \ldots, z_m$ е някакво изреждане без повторение на различните променливи от двата списъка $x_1, \ldots, x_n$ и $y_1, \ldots, y_k$.

За по-голяма прегледност и краткост, ще използуваме обичайните кратки записи с помощта на означенията: $\neg$, $\&$, $\vee$, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$. Така също вместо $\neg(x \in y)$ и $\neg(x = y)$ ще пишем съответно $x \notin y$ и $x \neq y$.

Упражнение. а) Запишете с описаните съкращения следните теоретико множествени свойства:

1) x е елемент на y, което пък не принадлежи на z;

2) нито x е елемент на y, нито y е елемент на x;

3) ако y е елемент на z, то y е елемент както на x_1, така и на u_2.

б) Прочетете следните съкращения:

1) $x \in y \Longleftrightarrow x \notin x$;

2) $u \in y \,\&\, y \in z \Longrightarrow u \in z$.

В обичайната математическа практика се срещат още два начина за образуване на свойства от по-прости свойства — с помощта на *кванторите* „за всяко“ и „съществува“. Те са следните: ако φ е теоретико-множествено свойство, отнасящо се и за множеството x, то „за всяко x е в сила φ“ и „съществува x за което φ“ са също теоретико-множествени свойства. За краткост ще ги записваме съответно така: $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$.

Примери. 1) съществува x, за което $x \in y$; $(\exists x(x \in y))$;

2) за всяко y не е вярно, че $y \in x$; $(\forall y(y \notin x))$;

3) за всяко y съществува такова z, че $z \notin y$; $(\forall y \exists z(z \notin y))$.

Какъв смисъл влагаме в свойството $\forall x \varphi$? — Обичайният математически смисъл. А именно, свойството $\forall x \varphi$ е вярно, ако за произволно множество x свойството φ е вярно. Аналогично, $\exists x \varphi$ е вярно, ако има множество x, за което свойството φ е вярно.

Тук е важно да обърнем внимание на следното: ако $\varphi(x, u_1, \ldots, u_n)$ е теоретико-множествено свойство на x, u_1, …, u_n (както сочи приетото съглашение за изписване на множествата, за които φ се отнася), то $\forall x \varphi$ и $\exists x \varphi$ са свойства, отнасящи се само за множествата, означени с u_1, …, u_n. Разгледайте внимателно свойствата от горния пример. Ще забележите, че свойствата от 1) и 2) се отнасят съответно само до y и само до x. Свойството от 3) не е свойство на никое конкретно множество, то е съждение за света на множествата $\mathbb{V}$, което е вярно или пък е невярно. Коя променлива пишем непосредствено след квантора няма значение, стига да променим *записа* на свойството след квантора по подходящ начин. Например свойството от 1) можем да го запишем, без да променяме смисъла му, и така $\exists z(z \in y)$ или $(\exists y_1(y_1 \in y))$, но *не* и така $(\exists x(x \in x))$

Преди да завършим този параграф ще се спрем, пак съвсем накратко, на още две добре познати неща от аксиоматичните теории — въвеждане на означения за свойства и за операции. Да си спомним един пример от елементарната геометрия. Казваме, че две прави a и b са успоредни, ако няма точка, която е инцидентна както с a, така и с b, и в този случай пишем $a \| b$. След това, когато наред с първичните геометрични понятия използуваме $a \| b$ (и други съкратени означения), няма никакво съмнение, че можем да „елиминираме“ съкращенията и да запишем свойството (съждението) само в термините на изходните, основните, понятия. Тук, в теорията на множествата, свободно ще се ползуваме от същата практика. Схемата е следната. Нека $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ е някакво теоретико-множествено свойство. Даваме дефиниция: ако за множествата $x_1, \ldots, x_n$ е вярно свойството φ, казваме „$x_1, \ldots, x_n$ са $\cdots$“ и в този случай пишем краткото $\theta(x_1, \ldots, x_n)$. Ясно е, че ако в едно свойство ψ освен разрешените неща се среща само θ, то можем да заместим в ψ участията на θ от вида $\theta(y_1, \ldots, y_n)$ с $\varphi'(y_1, \ldots, y_n)$, където с φ' сме означили същото свойство φ, но сме сменили по подходящ начин променливите, срещащи се непосредствено след квантори, например с променливи, които изобщо не се срещат в ψ. Така полученото свойство е теоретико-множествено, както не е трудно да се съобрази.

Да разгледаме един пример. Ще казваме, че *x е подмножество на y*, ако (е вярно) $\forall z(z \in x \Longrightarrow z \in y)$, и ще пишем $x \subseteq y$. Сега да видим как става елиминирането на съкращението $x \subseteq y$. В свойството

$$u \subseteq x \,\&\, x \subseteq v \Longrightarrow u \subseteq v$$

да направим описаната елиминация. Получаваме

$$\forall z(z \in u \Longrightarrow z \in x) \,\&\, \forall z(z \in x \Longrightarrow z \in v) \Longrightarrow \forall z(z \in u \Longrightarrow z \in v).$$

Да разгледаме още едно свойство

$$\exists z(u \subseteq z \,\&\, z \subseteq v) \Longrightarrow u \subseteq v,$$

за него резултатът от елиминацията е

$$\exists z(\forall w(w \in u \Longrightarrow w \in z) \,\&\, \forall w(w \in z \Longrightarrow w \in v)) \Longrightarrow \forall w(w \in u \Longrightarrow w \in v).$$

Тук, разбира се, бихме могли да заменим z от разглежданото свойство с друга променлива и да не прибягваме към използуваната замяна в дефиницията на $x \subseteq y$.

Упражнение. Елиминирайте $\subseteq$ в свойството

$$u \subseteq z \vee \forall w(w \in u \Longrightarrow \exists x(x \in z \,\&\, w \subseteq x)).$$

Нека $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$ е теоретико-множествено свойство, за което сме доказали с помощта на аксиомите, че за произволни множества x_1, …, x_n съществува единствено множество y такова, че $\psi(x_1, \ldots, x_n, y)$. В такъв случай ще казваме, че е зададена *формулна операция* (или за краткост само *операция*) $F_\psi(x_1, \ldots, x_n)$. Внимавайте, обичайната практика е да говорим, за *функцията*, породена от ψ, но при нас понятието функция ще има друг точен смисъл и в частност ще е множество дефиниционната ѝ област, а в описаната ситуация при $n = 1$ за дефиниционна област трябва да признаем множеството на всички множества!

Най-прост пример за използуване на формулна операция е случаят $n = 0$, тогава просто сме дефинирали едно фиксирано множество и за него въвеждаме означение. Например, в следващия параграф ще докажем, че съществува единствено множество, което няма елементи — $\psi(y)$ е $\forall x(x \notin y)$. За това множество ще използуваме означението $\varnothing$.

Накрая едно уславяне. Често вместо u_1, …, u_n ще пишем $\mathbf{u}$, а вместо $\forall u_1 \ldots \forall u_n$ и $\exists u_1, \ldots \exists u_n$ ще пишем съответно $\forall \mathbf{u}$ и $\exists \mathbf{u}$.

3. Аксиоматична система на Цермело–Френкел — I група аксиоми

(AxExi) *Съществува поне едно множество.*

$$\exists x(x = x)$$

(AxExt) *Ако две множества се състоят от едни и същи елементи, то те са равни.*

$$\forall x \forall y(\forall u(u \in x \Longleftrightarrow u \in y) \Longrightarrow x = y)$$

Тази аксиома ще наричаме *аксиома за екстенсионалност* (понякога се нарича и аксиома за обемност).

Като вземем пред вид отбелязаните по-горе свойства на равенството непосредствено съобразяваме, че аксиомата за екстенсионалност може да се запише по еквивалентен начин така:

$$\forall x \forall y(\forall u(u \in x \Longleftrightarrow u \in y) \Longleftrightarrow x = y).$$

С помощта на съкратения запис $x \subseteq y$ за свойството „x е подмножество на y“ $[\forall u(u \in x \Longrightarrow u \in y)]$ можем да запишем (AxExt) в следния вид:

$$\forall x \forall y((x \subseteq y \,\&\, y \subseteq x) \Longleftrightarrow x = y).$$

(AxComp$_\varphi$) *Нека* $\varphi(u_1, \dots, u_n, x)$ *е теоретико-множествено свойство и* u_1*,* $\dots$*,* u_n *са фиксирани множества. За всяко множество* A *съществува множество* B*, чиито елементи са точно онези елементи* x *на* A*, за които е вярно свойството* $\varphi(u_1, \dots, u_n, x)$*.*

$$\forall \mathbf{u} \forall A \exists B \forall x (x \in B \Longleftrightarrow x \in A \,\&\, \varphi(\mathbf{u}, x))$$

(B не се среща в записа на свойството φ.)

Най-напред да отбележим, че това не е една аксиома, а са безброй много аксиоми — по една за всяко свойство φ; ще ги наричаме с общото име *аксиомна схема за отделяне.*

Твърдение 1. *За всеки фиксиран набор от множества* u_1*,* $\dots$*,* u_n *и* A *множеството* B*, чието съществуване се гарантира от* (AxComp$_\varphi$)*, е единствено.*

Доказателство. Непосредствено следствие от аксиомата за екстенсионалност.

Твърдение 1 ни дава основание да използуваме обичайното означение за това множество B

$$\{x \mid x \in A \,\&\, \varphi(\mathbf{u}, x)\} \quad \text{или} \quad \{x \in A \mid \varphi(\mathbf{u}, x)\}.$$

Упражнение. Докажете, че $\{x \in A \mid \varphi(\mathbf{u}, x)\} \subseteq A$.

Твърдение 2. *Съществува единствено множество, което няма елементи.*

Доказателство. Нека A е множество, съгласно (AxExi) такова съществува. Да означим с B множеството $\{x \mid x \in A \,\&\, x \neq x\}$. Очевидно е изпълнено $\forall x (x \notin B)$. Нека B_1 е произволно множество, за което е вярно $\forall x (x \notin B_1)$. Сега от аксиомата за екстенсионалност лесно получаваме $B = B_1$.

От тук нататък за множеството от твърдение 2 ще използуваме обичайното означение $\varnothing$ и ще го наричаме празно множество.

Упражнение. 1. Покажете, че формулираните до тук безброй много аксиоми не гарантират съществуването на други множества, освен $\varnothing$. (*Идея.* Постройте модел на тези аксиоми, който има само един индивид.)

2. Постройте модел на тези аксиоми, който има точно три различни индивида.

Следващата аксиома се нарича аксиома за чифта (или още, аксиома за ненаредената двойка).

(AxPr) *За всеки две множества a и b съществува множество X, измежду елементите на което са a и b.*

$$\forall a \forall b \exists X (a \in X \,\&\, b \in X).$$

Твърдение 3. *Съществува единствено множество, което има за елементи само a и b.*

Доказателство. Нека a и b са две произволни множества. Да разгледаме едно множество X, измежду елементите на което се срещат a и b, съгласно аксиомата за чифта такова има. С помощта на схемата за отделяне, да разгледаме множеството B на онези негови елементи x, за които $x = a \vee x = b$, т.е. $B = \{x \mid x \in X \,\&\, (x = a \vee x = b)\}$. Непосредствено се проверява, че $\forall u(u \in B \iff u = a \vee u = b)$. От аксиомата за обемност пък веднага следва, че ако $\forall u(u \in B' \iff u = a \vee u = b)$, то $B = B'$. С това твърдението е доказано.

Дефиниция. За всеки две множества a и b единственото множество B със свойството $\forall u(u \in B \iff u = a \vee u = b)$ ще наричаме *чифт на a и b*. Ще го означаваме с $\{a, b\}$.

Така въведохме една двуместна формулна операция — резултатът от прилагането на тази операция към множества a и b е чифтът $\{a, b\}$.

Ако $a = b$, то чифта $\{a, b\}$ ще означаваме с $\{a\}$ и ще наричаме *синглетон на a*.

Упражнение. Докажете, че:

1. $\varnothing \neq \{\varnothing\}$;
2. $\{\varnothing\} \neq \{\{\varnothing\}\}$ и $\varnothing \neq \{\{\varnothing\}\}$;
3. за всяко естествено число n има поне n множества, които са две по две различни.
4. покажете, че с въведените до този момент аксиоми не можем да докажем, че има множество с поне три различни елемента.

(AxUn) *За всяко множество A съществува множество X, измежду елементите на което са елементите на елементите на A.*

$$\forall A \exists X \forall x \forall y (x \in y \,\&\, y \in A \Longrightarrow y \in X).$$

Твърдение 4. *Съществува единствено множество, което има за елементи само елементите на елементите на A.*

Доказателство. Нека A е произволно множество. Нека X е едно множество, чието съществуване се гарантира от (AxUn). Да отделим от X с помощта на свойството $\exists y(y \in A \,\&\, x \in y)$ множеството B. Непосредствено се проверява, че B има желаното свойство

$$\forall x(x \in B \Longleftrightarrow \exists y(x \in y \,\&\, y \in A)).$$

От аксиомата за екстенсионалност веднага следва, че множеството B с това свойство е единствено.

Дефиниция. Единственото множество от твърдение 4 се нарича *обединение на* A и се означава с $\bigcup A$.

Така въведохме още една едноместна формулна операция. Резултатът от прилагането ѝ към множество A е $\bigcup A$.

Нека A и B са две множества. Тогава съществува чифтът $\{A, B\}$, а значи и неговото обединение $\bigcup\{A, B\}$ съществува. Както непосредствено се проверява

$$\forall x(x \in \bigcup\{A, B\} \Longleftrightarrow x \in A \vee x \in B).$$

Вероятно забелязвате, че $\bigcup\{A, B\}$ е познатото ви *обединение* на множествата A и B, което се означава с $A \cup B$.

(AxPo) *За всяко множество A съществува множество X, измежду елементите на което са подмножествата на A.*

$$\forall A \exists X \forall x(x \subseteq A \Longrightarrow x \in X).$$

Твърдение 5. *Съществува единствено множество, което има за елементи само подмножествата на A.*

Доказателство. Тъй като разсъжденията са напълно аналогични на направените при доказването на твърденията 3 и 4, ги предоставяме за упражнение.

Дефиниция. Множеството, чието съществуване и единственост се гарантират от твърдение 5, се нарича *степенно множество на* A (или *множество от подмножествата на* A) и се означава с $\mathcal{P}(A)$.

По такъв начин въведохме още една едноместна формулна операция

$$\forall x(x \in \mathcal{P}(A) \iff x \subseteq A).$$

4. Някои елементарни следствия от формулираните аксиоми

Основната цел в този параграф е да въведем основните теоретико-множествени операции, с които читателят е запознат от наивната теория на множествата, а така също и да докажем някои други елементарни твърдения, необходими за по-нататък.

1. Подмножества. Ще изброим някои основни свойства за включване на множества, в чиято вярност читателят лесно би се уверил.
а) $\varnothing \subseteq A$,
б) $A \subseteq A$,
в) Ако $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$,
г) $\{x \mid x \in A \,\&\, \varphi(x, \mathbf{u})\} \subseteq A$,
д) $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \subseteq \bigcup A)$,
е) Ако $\forall x(x \in A \Longrightarrow x \subseteq B)$, то $\bigcup A \subseteq B$.

2. Обединение на множества. Операцията обединение на две множества, $A \cup B$, която въведохме в предишния параграф, има има следните основни свойства:
а) $A \cup B = B \cup A$,
б) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$,
в) $A \cup \varnothing = A$, $A \cup A = A$,
г) Ако $A \subseteq A'$ и $B \subseteq B'$, то $A \cup B \subseteq A' \cup B'$
д) $A \subseteq A \cup B$ и $B \subseteq A \cup B$,
е) $A \cup B = B \iff A \subseteq B$.

3. Сечение на множества. Най-напред забележете, че за всеки две множества A и B съществува единствено множество C със свойството

$$\forall x(x \in C \iff x \in A \,\&\, x \in B).$$

(Множеството $\{x \in A \mid x \in B\}$ очевидно има желаното свойство, а аксиомата за екстенсионалност осигурява единствеността.) Това единствено множество C се нарича *сечение на A и B* и се означава с $A \cap B$.

Лесно се проверява, че:
а) $A \cap B = B \cap A$,
б) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$,
в) $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cap A = A$,
г) Ако $A \subseteq A'$ и $B \subseteq B'$, то $A \cap B \subseteq A' \cap B'$
д) $A \cap B \subseteq A$ и $A \cap B \subseteq B$,

е) $A \cap B = A \iff A \subseteq B$,
ж) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
з) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Вероятно сте обърнали внимание на различните начини, които използувахме за дефиниране на обединение на две множества и сечение на две множества.

Да обсъдим сега въпроса за сечение на елементите на множество. И така, нека A е множество. Има ли множество C със свойството

$$(*) \qquad \forall x(x \in C \iff \forall y(y \in A \implies x \in y))$$

и дали то е единствено? Нека най-напред разгледаме случая $A \neq \varnothing$. Нека B е произволен елемент на A. Със схемата за отделянето да образуваме множеството

$$\{x \in B \mid \forall y(y \in A \implies x \in y)\}.$$

Ясно е, че то има желаното свойство $(*)$ и от аксиомата за екстенсионалност следва единствеността му.

Да разгледаме случая $A = \varnothing$. Нека x е произволно множество. Тогава по тривиални причини имаме $\forall y(y \in \varnothing \implies x \in y)$. Следователно ако съществува множество C със свойството $(*)$, то би трябвало $x \in C$. С други думи, C би трябвало да е множеството на всички множества, а такова не съществува, както ще видим малко по-нататък. (Опитайте се сами да докажете това твърдение като използувате ръселовото свойство.)

По тази причина ще дефинираме сечение на елементите на множество A, $\bigcap A$, по следния начин. Ако $A = \varnothing$, то $\bigcap A = \varnothing$; ако $A \neq \varnothing$, то $\bigcap A$ е единственото множество C със свойството $(*)$.

Упражнение. Докажете, че $A \cap B = \bigcap\{A, B\}$.

4. Разлика на множества. За всеки две множества A и B множеството $\{x \in A \mid x \notin B\}$ се нарича *разлика на* A *и* B (или още *допълнение на* B *до* A) и се означава с $A \setminus B$.

Упражнение. Докажете, че
а) $A \subseteq B \iff A \setminus B = \varnothing$,
б) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$,
в) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$,
г) $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$,
д) Ако $B \subseteq A$, то $B \setminus A = \varnothing$ и $B = A \setminus (A \setminus B)$.

e) Нека $A \neq \varnothing$, а B е произволно множество. Дефинираме множеството C по следния начин $C = \{x \in \mathcal{P}(B) \mid \exists y(y \in A \,\&\, x = B \setminus y)\}$. Докажете, че

$$B \setminus \bigcap A = \bigcup C \quad \text{и} \quad B \setminus \bigcup A = \bigcap C$$

(обобщени закони на Де Морган).

5. Няма множество на всички множества. Парадоксът на Ръсел, който разгледахме в параграф 1, в аксиоматичната теория показва, че няма множество на всички множества (разбира се, ако теорията е непротиворечива). Наистина, да допуснем, че съществува множеството V на всички множества, т.е. $\forall x(x \in V)$. Тогава от V с помощта на ръселовото свойство $\mathcal{R}$ можем да образуваме ръселовото множество R, което, както знаем, води до абсурд. Следователно не съществува множеството на всички множества.

Упражнение. Докажете, че $\forall A \exists x(x \notin A)$.

6. Не съществува абсолютно допълнение. За произволно множество A не съществува множество B, за което $\forall x(x \in B \iff x \notin A)$. Наистина, ако за някое A такова множество B съществува, то $A \cup B$ ще е множеството на всички множества, а такова няма.

7. Няма множество, което да съвпада с множеството на подмножествата си. Ще докажем нещо повече — $\forall A(\mathcal{P}(A) \not\subseteq A)$. За целта да допуснем, че за някое A е в сила $\mathcal{P}(A) \subseteq A$. Да дефинираме множеството B така:

$$B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin x\}.$$

До желания абсурд ще стигнем като докажем $B \in B \iff B \notin B$.

Наистина, нека е в сила $B \in B$. Тогава от дефиницията на B следва $B \notin B$. Сега нека е вярно $B \notin B$. Тъй като $B \subseteq A$, то $B \in \mathcal{P}(A)$, но съгласно допускането $\mathcal{P}(A) \subseteq A$, откъдето следва $B \in A$. Имаме $B \in A$ и $B \notin B$, поради което от дефиницията на B получаваме $B \in B$.

8. Транзитивни множества. Доказаното в предишната точка естествено поражда въпроса има ли множества A, за които $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Оказва се, че такива множества има и те играят съществена роля в теорията на множествата.

Дефиниция. Едно множество A се нарича *транзитивно*, ако $A \subseteq \mathcal{P}(A)$. Казано с думи, A е транзитивно, ако неговите елементи са му и подмножества. Ще използуваме съкращението $\mathrm{trans}(A)$ за означаване на факта, че A е транзитивно.

Непосредствено се проверява, че

$$\mathrm{trans}(A) \iff \forall x \forall y (x \in y \,\&\, y \in A \Longrightarrow x \in A).$$

Ясно е, че множествата $\varnothing$, $\{\varnothing\}$, $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ са транзитивни, а $\{\{\varnothing\}\}$ и $\{\{\{\varnothing\}\}\}$ не са. Списъкът от примери за транзитивни множества може лесно да се продължи с използуване на така наречената операция *наследник* — $\mathcal{S}(A) = A \cup \{A\}$. Забележете, че $A \subseteq \mathcal{S}(A)$ и $A \in \mathcal{S}(A)$.

Твърдение 1. *Нека A е транзитивно множество. Тогава*
а) $\mathrm{trans}(\mathcal{S}(A))$;
б) $\mathrm{trans}(\bigcup A)$.

Доказателство. а) Нека x е произволен елемент на $\mathcal{S}(A)$. Тъй като $\mathcal{S}(A) = A \cup \{A\}$, от $x \in \mathcal{S}(A)$ следва $x \in A$ или $x \in \{A\}$. Ако $x \in A$, предвид $\mathrm{trans}(A)$, получаваме $x \subseteq A$, и значи $x \subseteq \mathcal{S}(A)$. Ако $x \in \{A\}$, то $x = A$, откъдето веднага следва $x \subseteq \mathcal{S}(A)$.

б) Нека $x \in \bigcup A$. Тогава съществува такова y, че $x \in y \,\&\, y \in A$. Оттук и от $\mathrm{trans}(A)$ заключаваме $x \in A$, откъдето следва $x \subseteq \bigcup A$.

Твърдение 2. *Нека елементите на A са транзитивни множества. Тогава*
а) $\mathrm{trans}(\bigcup A)$;
б) $\mathrm{trans}(\bigcap A)$.

Доказателство. а) Нека x е произволен елемент на $\bigcup A$. Тогава съществува елемент y на A, за който $x \in y$. Тъй като елементите на A са транзитивни множества, от $x \in y$ следва $x \subseteq y$. Но $y \subseteq \bigcup A$, откъдето заключаваме $x \subseteq \bigcup A$.

б) Ако $A = \varnothing$, то по дефиниция имаме $\bigcap A = \varnothing$, а както вече отбелязахме $\mathrm{trans}(\varnothing)$. Да разгледаме случая $A \neq \varnothing$. Нека x е произволен елемент на $\bigcap A$, а B е произволен елемент на A. Тъй като $x \in B$ и $\mathrm{trans}(B)$, имаме $x \subseteq B$. Но B е произволен елемент на A, поради което е в сила $x \subseteq \bigcap A$.

В един от следващите параграфи, използувайки още аксиоми от системата на Цермело–Френкел, които дотук не сме формулирали, ще покажем, че има едноместна формулна операция TC, която за всяко множество x дава най-малкото (относно включването) транзитивно множество, съдържащо x като подмножество.

Упражнения. 1. Докажете, че за всеки три множества a, b и c съществува единствено множество $\{a, b, c\}$ с елементи a, b и c.

2. Докажете, че ако $A \subseteq B$, то $\bigcup A \subseteq \bigcup B$.

3. Нека $\forall x(x \in A \Longrightarrow \exists y(y \in B \,\&\, x \subseteq y))$. Докажете, че $\bigcup A \subseteq \bigcup B$ и $\bigcap A \subseteq \bigcap B$.

4. Докажете, че $A \subseteq B \iff \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$.

5. Наредени двойки. Декартово произведение на множества

1. Понятието наредена двойка е важно за аксиоматична система, претендираща в нейните рамки да може да се изгради почти цялата математика, най-малко поради възможността с негова помощ да се дефинира централно понятие като функция. От гледна точка на теорията на множествата дефинирането на наредена двойка означава да се въведе двуместна (формулна) операция $\langle x, y\rangle$ така, че

$$\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle \iff x = x_1 \,\&\, y = y_1. \tag{1}$$

Как точно се получава множеството $\langle x, y\rangle$ от x и y няма особено значение за основната цел, която преследваме — да покажем, че теорията на множествата дава удобен и достатъчен апарат за математиката.

Дефиниция (Куратовски, 1921 г.)**.** $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.

Твърдение 1. *Така дефинираната операция наредена двойка удовлетворява* (1).

Доказателство. Най-напред ще докажем, за произволни a, b и c

$$\{a, b\} = \{a, c\} \Longrightarrow b = c. \tag{2}$$

Наистина, от $b \in \{a, b\}$ и $\{a, b\} = \{a, c\}$ получаваме $b \in \{a, c\}$, поради което $b = a \vee b = c$. Ако $b = a$, то от $c \in \{a, c\}$ и $\{a, b\} = \{a, c\}$ получаваме $c = a \vee c = b$, но и в двата случая имаме $c = b$.

Нека $\langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$. Съгласно дефиницията на Куратовски това дава

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}.$$

Сега от $\{x\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$ следва $\{x\} \in \{\{x_1\}, \{x_1, y_1\}\}$, поради което $\{x\} = \{x_1\} \vee \{x\} = \{x_1, y_1\}$. Ако $\{x\} = \{x_1\}$, то $x = x_1$ и $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x\}, \{x, y_1\}\}$, откъдето, прилагайки два пъти (2), последователно получаваме $\{x, y\} = \{x, y_1\}$ и $y = y_1$. Ако $\{x\} = \{x_1, y_1\}$, то $x = x_1 = y_1$, от което следва $\{\{x\},\{x,y\}\} = \{\{x\}\}$. Следователно $x = y$. Така в този случай получаваме $x = x_1 = y = y_1$.

Свойството на едно множество z да е наредена двойка ще означаваме с $\mathrm{OrPr}(z)$. С други думи, $\mathrm{OrPr}(z)$ е съкращение за $\exists x \exists y (z = \langle x, y\rangle)$.

Множеството x ще наричаме първа компонента, а множеството y — втора компонента, на наредената двойка $\langle x, y\rangle$. По естествен начин въвеждаме едноместни (формулни) операции pr_1 и pr_2, които по дадена наредена двойка дават съответно първата и втората ѝ компоненти, а за аргумент, който не е наредена двойка — $\varnothing$:

$$\begin{aligned}\mathrm{pr}_1(z) = x &\iff (\neg\mathrm{OrPr}(z) \,\&\, x = \varnothing) \vee \exists y (z = \langle x, y\rangle),\\ \mathrm{pr}_2(z) = y &\iff (\neg\mathrm{OrPr}(z) \,\&\, y = \varnothing) \vee \exists x (z = \langle x, y\rangle),\end{aligned}$$

Твърдение 1 осигурява коректността на pr_1 и pr_2.

Упражнение. Докажете, че

$$z = \langle \mathrm{pr}_1(z), \mathrm{pr}_2(z)\rangle \iff \mathrm{OrPr}(z).$$

Ясно е, че с помощта на наредени двойки за всяко цяло число n, $n > 1$, можем да дефинираме *наредена n-орка* по индукция

$$\langle x_1, x_2 \ldots, x_{n+1}\rangle = \langle x_1, \langle x_2, \ldots, x_{n+1}\rangle\rangle$$

и да докажем

$$\langle x_1, \ldots, x_n\rangle = \langle y_1, \ldots, y_n\rangle \iff x_1 = y_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n = y_n.$$

Упражнение. 1. Нека a и b са различни множества (например $a = \varnothing$, $b = \{\varnothing\}$). Докажете, че следната дефиниция за наредена двойка $\langle x, y\rangle = \{\{x, a\}, \{y, b\}\}$ удовлетворява (1).

2. Докажете, че следната дефиниция за наредена двойка $\langle x, y\rangle = \{\{\{x\}, \varnothing\}, \{\{y\}\}\}$ също удовлетворява (1). (Н. Винер, 1914 г.)

3. Както навсякъде в този ръкопис, с изключение на предишните две задачи, предполагаме дефиницията на Куратовски за наредена двойка. Докажете, че:

а) $\bigcap\bigcap\langle x, y\rangle = x$;

б) $(\bigcap\bigcup\langle x, y\rangle) \cup (\bigcup\bigcup\langle x, y\rangle \setminus \bigcup\bigcap\langle x, y\rangle) = y$.

2. Ще въведем двуместна (формулна) операция, с която на всеки две множества A и B се съпоставя множество $A \times B$, чиито елементи са наредените двойки с първа компонента от A и втора компонента от B.

Дефиниция. $A \times B = \{z \mid \exists x \exists y(x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, z = \langle x, y\rangle)\}$.

За да се убедим в коректността на дефиницията е достатъчно да докажем, че за произволни A и B съществува множество C със свойството $\forall x \forall y(x \in A \,\&\, y \in B \Longrightarrow \langle x, y\rangle \in C)$. Сега ще използуваме конкретната дефиниция за наредена двойка, в случая дефиницията на Куратовски. Наистина, нека $x \in A$ и $y \in B$. Тогава $x \in A \cup B$ и $y \in A \cup B$, поради което имаме $\{x\} \subseteq A \cup B$ и $\{x, y\} \subseteq A \cup B$, т.е. $\{x\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$ и $\{x, y\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Следователно $\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, откъдето веднага заключаваме $\langle x, y\rangle \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. Ето защо в качеството на C можем да вземем $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$, да приложим схемата за отделяне за C и за свойството $\exists x \exists y(x \in A \,\&\, y \in B \,\&\, z = \langle x, y\rangle)$, и накрая да използуваме аксиомата за екстенсионалност.

Множеството $A \times B$ ще наричаме *декартово произведение на A и B*, взети в този ред. Ето някои свойства на операцията декартово произведение, в чиято вярност лесно би могъл всеки да се убеди самостоятелно.

1) Декартовото произведение не е нито комутативно, нито асоциативно:

$\neg \forall A \forall B(A \times B = B \times A)$,

$\neg \forall A \forall B \forall C(A \times (B \times C) = (A \times B) \times C)$;

2) $\varnothing \times A = A \times \varnothing = \varnothing$;

3) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$, $C \times (A \cup B) = (C \times A) \cup (C \times B)$;

4) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$, $C \times (A \cap B) = (C \times A) \cap (C \times B)$;

5) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$, $C \times (A \setminus B) = (C \times A) \setminus (C \times B)$;

6) $A \subseteq A_1 \,\&\, B \subseteq B_1 \Longrightarrow A \times B \subseteq A_1 \times B_1$.

Дефиниция. За всяко естествено число n, $n \geq 1$, индуктивно дефинираме *n-та декартова степен на A* за произволно множество A по следния начин: $A^1 = A$, $A^{n+1} = A \times A^n$.

Упражнение. 1. Проверете, че A^n, $n \geq 2$, е множеството на наредените n-орки от елементи на A.

2. Проверете, че $A_1 \times (A_2 \times \ldots (A_{n-1} \times A_n) \ldots) = \{z \mid \exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_n(x_1 \in A_1 \,\&\, x_n \in A_n \,\&\, z = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle)\}$.

6. Бинарни релации и операции с тях

1. Обичайна математическа практика е свойствата на двойки от обекти от дадено множество да се представят с множеството на наредените двойки от обекти, за който свойството е вярно. Например свойството „естественото число n дели естественото число k“ се представя с

$\{\langle n, k\rangle \mid n$ дели $k\}$. Или да речем, че разглеждаме даден преобразувател $\mathcal{E}$, евентуално недетерминистичен, на обекти от множеството A в обекти от множеството B. Абстрахирайки се от самия процес на преобразуването, можем да разглеждаме $\mathcal{E}$ като множеството от наредените двойки $\langle x, y\rangle$, за които $x \in A$, $y \in B$ и y може да се получи от x чрез $\mathcal{E}$.

Дефиниция. *Бинарна релация* ще наричаме всяко множество R, чиито елементи са наредени двойки, и ще използваме съкращението $\mathrm{Rel}(R)$. Записано в символи:

$$\mathrm{Rel}(R) \iff \forall z(z \in R \Longrightarrow \mathrm{OrPr}(z)).$$

Нека си мислим за недетерминистичния преобразувател $\mathcal{E}$, за който стана дума по-горе, представен с бинарната релация $R_{\mathcal{E}}$. Можем ли да определим чрез $R_{\mathcal{E}}$ множеството на обектите, за които $\mathcal{E}$ би могъл да даде резултат, и множеството на обектите, които биха могли да се получат в резултат от работата на $\mathcal{E}$? Казано с други думи, можем ли да определим в езика на теорията на множествата дефиниционната област и областта от стойности на $\mathcal{E}$? В следващата дефиниция ще определим едноместни формулни операции dom и rng, които за аргумент, който е бинарна релация, дават съответно дефиниционната област и областта от стойности за преобразувател, представен с аргумента, и $\varnothing$ — ако аргументът не е бинарна релация.

Дефиниция.
1. $\mathrm{dom}(R) = z \iff (\neg\mathrm{Rel}(R) \,\&\, z = \varnothing) \vee (\mathrm{Rel}(R) \,\&\, \forall x(x \in z \iff \exists y(\langle x, y\rangle \in R)))$;
2. $\mathrm{rng}(R) = z \iff (\neg\mathrm{Rel}(R) \,\&\, z = \varnothing) \vee (\mathrm{Rel}(R) \,\&\, \forall y(y \in z \iff \exists x(\langle x, y\rangle \in R)))$;

Най-напред трябва да се убедим в коректността на горната дефиниция, което ще рече да проверим, че за всяко множество R има единствено множество z, за което дясната страна на еквивалентността от 1. (съответно 2.) е вярна. Наистина, за произволни x и y имаме $x, y \in \{\{x, y\}\}$ и $\{x, y\} \in \langle x, y\rangle$, поради което за всяка бинарна релация R от $\langle x, y\rangle \in R$ следват $x \in \bigcup\bigcup R$ и $y \in \bigcup\bigcup R$. Следователно за всяка бинарна релация R условията $\exists y(\langle x, y\rangle \in R)$ и $x \in \bigcup\bigcup R \,\&\, \exists y(\langle x, y\rangle \in R)$ са еквивалентни. Аналогично $\exists x(\langle x, y\rangle \in R)$ и $y \in \bigcup\bigcup R \,\&\, \exists x(\langle x, y\rangle \in R)$ са еквивалентни. Сега от схемата за отделянето заключаваме, че условията от дясната страна на еквивалентността съответно в 1. и 2. определят множества, чиято единственост пък лесно се получава от аксиомата за екстенсионалност.

Упражнение. Докажете, че ако R е бинарна релация, то
$\mathrm{dom}(R) = \{\mathrm{pr}_1 z \mid z \in R\}$ и $\mathrm{rng}(R) = \{\mathrm{pr}_2 z \mid z \in R\}$.
(Следвайки обичайната практика, пишем $\{\mathrm{pr}_1 z \mid z \in R\}$ вместо $\{x \mid \exists z(z \in R \,\&\, x = \mathrm{pr}_1 z\}$.)

Коментар. Читателят вероятно е забелязал, че ако сме сигурни в съществуването на множествата от десните страни на равенствата от горното упражнение, бихме могли да ги използуваме за да се убедим в коректността на дефинициите на dom и rng. И сега едно предупреждение в тази връзка. За съществуването на $\{\mathrm{pr}_1 z \mid z \in R\}$ не бихме ли могли да използуваме следния аргумент: $\{\mathrm{pr}_1 z \mid z \in R\}$ е множество, защото е всъщност образът на R при формулната операция pr_1. Такъв тип аргументи за съществуване на множества се узаконяват с така наречената аксиомна схема за заместването, която ще разгледаме в следващ параграф. Въпреки това по-нататък свободно ще използуваме дефиниции на множества от вида

$$\{f(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in A_n \,\&\, \varphi\},$$

като ще ги смятаме за съкратен запис на

$$\{z \mid \exists x_1 \ldots \exists x_n(x_1 \in A_1 \,\&\, \ldots \,\&\, x_n \in A_n \,\&\, z = f(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, \varphi\}.$$

За да се убедим в коректността на такива дефиниции на множества без да използуваме аксиомната схема за заместването е необходимо във всеки конкретен случай да можем да посочим множество B, зависещо евентуално от $A_1, \ldots, A_n$ и останалите параметри на φ, така че

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n(x_1 \in A_1 \,\&\, x_n \in A_n \,\&\, z = f(x_1, \ldots, x_n) \,\&\, \varphi) \Longrightarrow z \in B.$$

Дефиниция. $\mathrm{fld}(R) = \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{rng}(R)$.

За всяка бинарна релация R множеството $\mathrm{fld}(R)$ се нарича *поле на релацията R*.

Твърдение 1. *За всяка бинарна релация R са в сила:*
а) $R \subseteq \mathrm{dom}(R) \times \mathrm{rng}(R)$;
б) $R \subseteq (\mathrm{fld}(R))^2$.

Доказателство. Тривиално следствие от дефинициите.

2. Операции с бинарни релации. За всяка бинарна релация R с R^{-1} ще означаваме бинарната релация $\{\langle y, x\rangle \mid \langle x, y\rangle \in R\}$ и ще я наричаме *обратна на R*.

В следващото твърдение ще изброим някои често използвани свойства на обратната релация, в чиято вярност читателят би могъл да се увери с непосредствена проверка.

Твърдение 2. *Нека R и S са бинарни релации. Тогава:*
а) $\mathrm{dom}(R^{-1}) = \mathrm{rng}(R)$ и $\mathrm{rng}(R^{-1}) = \mathrm{dom}(R)$;
б) $(R^{-1})^{-1} = R$;
в) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;
г) $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$;
д) $(R \setminus S)^{-1} = R^{-1} \setminus S^{-1}$;

Дефиниция. За всеки две релации R и S с $R \circ S$ ще означаваме бинарната релация $\{\langle x, z\rangle \mid \exists y(\langle x, y\rangle \in R \,\&\, \langle y, z\rangle \in S)\}$ и ще я наричаме *композиция на R и S*.

Твърдение 3. *Нека R, S и T са бинарни релации. Тогава:*
а) $R \circ (S \circ T) = (R \circ S) \circ T$;
б) $(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$;
в) $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$, $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$;
г) $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$, $(S \cap T) \circ R \subseteq (S \circ R) \cap (T \circ R)$;
д) $(R \circ S) \setminus (R \circ T) \subseteq R \circ (S \setminus T)$, $(S \circ R) \setminus (T \circ R) \subseteq (S \setminus T) \circ R$.
В г) *и* д) *не може да се замени $\subseteq$ с $=$.*

Доказателство. Тъй като доказателството не изисква никаква изобретателност, а само непосредствени проверки, ще докажем само първото включване от д). Нека $u \in (R \circ S) \setminus (R \circ T)$. Тогава $u \in (R \circ S)$ и значи $u = \langle x, y\rangle$, откъдето следва, че за някое z са в сила $\langle x, z\rangle \in R$ и $\langle z, y\rangle \in S$. Обаче $u = \langle x, y\rangle \notin R \circ T$ ни позволява да твърдим, че не съществува z', за което едновременно $\langle x, z'\rangle \in R$ и $\langle z', y\rangle \in T$. В частност, не е възможно едновременно да имаме $\langle x, z\rangle \in R$ и $\langle z, y\rangle \in T$. Но z е такова, че $\langle x, z\rangle \in R$, поради което $\langle z, y\rangle \notin T$. Следователно $\langle z, y\rangle \in S \setminus T$, откъдето, предвид $\langle x, z\rangle \in R$, получаваме $\langle x, y\rangle \in R \circ (S \setminus T)$, т.е. $u \in R \circ (S \setminus T)$.

Ще покажем, че включването от г) не може да се замени с равенство. Нека a, b, c и d са множества, като $b \neq c$. Полагаме $R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle\}$, $S = \{\langle b, d\rangle\}$ и $T = \{\langle c, d\rangle\}$. Тогава $R \circ (S \cap T) = \varnothing$ и $(R \circ S) \cap (R \circ T) = \{\langle a, d\rangle\}$.

Останалата част от твърдението я оставяме за упражнение.

7. Функции

Дефиниция. *Функция* ще наричаме бинарна релация, която не съдържа различни наредени двойки с равни първи компоненти. С други думи, функции са множествата f, за които е вярно следното теоретико множествено свойство

$$\mathrm{Rel}(f) \,\&\, \forall x \forall y \forall y' (\langle x, y\rangle \in f \,\&\, \langle x, y'\rangle \in f \Longrightarrow y = y'),$$

което за краткост ще означаваме с $\mathrm{Func}(f)$.

Ще използуваме записа $f : A \to B$ за съкращение на

$$\mathrm{Func}(f) \,\&\, \mathrm{dom}(f) = A \,\&\, \mathrm{rng}(f) \subseteq B.$$

Използувайки интуицията от предишния параграф за релациите като представящи преобразуватели на обекти, можем да кажем, че фунциите представят детерминистичните преобразуватели. Така, ако $f : A \to B$, то f представя всеки детерминистичен преобразувател на елементите на A в елементи на B, който за произволен елемент x на A дава онзи единствен елемент y на B, такъв че $\langle x, y\rangle \in f$.

Както обикновено, ако $f : A \to B$ и $x \in A$, то с $f(x)$ ще означаваме единствения елемент y на B, за който $\langle x, y\rangle \in f$. Множествата $\mathrm{dom}(f)$ и $\mathrm{rng}(f)$ се наричат съответно *дефиниционна област* и *област от стойности на* f.

Упражнение. Нека f и g са функции. Тогава

$f = g \Longleftrightarrow \mathrm{dom}(f) = \mathrm{dom}(g) \,\&\, \forall x(x \in \mathrm{dom}(f) \Longrightarrow f(x) = g(x)).$

Дефиниции. 1. Ако $f : A \to B$ и $\mathrm{rng}(f) = B$, ще казваме, че f е *сюрекция* или че f *е сюрективна*, или още че f е функция от A *върху* B.

2. Ако $f : A \to B$ и $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 \in A \,\&\, x_2 \in A \,\&\, x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$, ще казваме, че f *е инекция* или че f *е инективна*.

3. Ако $f : A \to B$ и f е инекция от A върху B (с други думи, f е инекция и сюрекция), ще казваме, че f *е биекция на* A *върху* B или за краткост само, че f *е биективна*.

Твърдение 1. *Нека* f *е функция. Тогава*

а) f^{-1} *е функция* $\Longleftrightarrow$ f *е инективна;*

б) *Ако* f^{-1} *функция, то тя е инективна.*

Доказателство. а.1) Нека f^{-1} е функция. Ще докажем, че f е инективна. Наистина, нека $x_1 \in \mathrm{dom}(f)$, $x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ и $x_1 \neq x_2$. Тогава $\langle x_1, f(x_1)\rangle \in f$ и $\langle x_2, f(x_2)\rangle \in f$, поради което $\langle f(x_1), x_1\rangle \in f^{-1}$ и $\langle f(x_2), x_2\rangle \in f^{-1}$. Ако $f(x_1) = f(x_2)$, тъй като f^{-1} е функция, получаваме абсурдното $x_1 = x_2$. Следователно е в сила $f(x_1) \neq f(x_2)$.

а.2) Сега нека предположим, че f е инективна функция. Ще докажем, че релацията f^{-1} е функция. Наистина, нека са изпълнени $\langle y, x_1 \rangle \in f^{-1}$ и $\langle y, x_2 \rangle \in f^{-1}$. Тогава $\langle x_1, y \rangle \in f$ и $\langle x_2, y \rangle \in f$, т. е. $f(x_1) = y$ и $f(x_2) = y$, откъдето получаваме $f(x_1) = f(x_2)$. Сега от инективността на f следва $x_1 = x_2$.

б) Нека x_1 и x_2 са два произволни различни елемента на $\mathrm{dom}(f^{-1})$. Да означим с y_1 и y_2 съответно $f^{-1}(x_1)$ и $f^{-1}(x_2)$. Тогава за $i = 1, 2$ имаме $\langle x_i, y_i \rangle \in f^{-1}$, поради което $\langle y_i, x_i \rangle \in f$, т. е. $x_i = f(y_i)$. Ето защо, ако $y_1 = y_2$, в сила е абсурдното $x_1 = x_2$. Следователно $y_1 \neq y_2$, т. е. $f^{-1}(x_1) \neq f^{-1}(x_2)$.

Следствие 1. *За всяка релация f е в сила еквивалентността*

$$f \text{ е инективна функция} \iff f^{-1} \text{ е инективна функция.}$$

Дефиниции. Нека f е функция и $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$. Тогава непосредствено се съобразява, че релацията $f \cap (A \times \mathrm{rng}(f))$ е функция с дефиниционна област A и $\forall x \forall y (x \in A \Longrightarrow (y = f(x) \iff \langle x, y \rangle \in f \cap (A \times \mathrm{rng}(f))))$. Тази функция се нарича *ограничение* (*рестрикция*) *на f до A* и се означава с $f \restriction A$.

Казваме, че функцията f *е продължение* на функцията g, ако $g \subseteq f$.

Упражнение. Нека f и g са функции. Тогава
1. f е продължение на $g \iff \mathrm{dom}(g) \subseteq \mathrm{dom}(f) \,\&\, f \restriction \mathrm{dom}(g) = g$;
2. $f \cap g$ е функция и f и g са нейни продължения.

За разлика от сечението, обединението на функции не винаги е функция, както лесно можем да се убедим. Целта на следващата дефиниция е да се фиксират условията, при които обединение на функции е функция.

Дефиниция. Две функции f и g се наричат *съвместими*, ако

$$f \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)) = g \restriction (\mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)).$$

Очевидно f и g са съвместими точно тогава, когато

$$\forall x (x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g) \Longrightarrow f(x) = g(x)).$$

Твърдение 2. *За всяко множество A множеството $\bigcup A$ е функция точно тогава, когато всеки два елемента на A са съвместими функции. Ако $\bigcup A$ е функция, то*

$$\mathrm{dom}(\bigcup A) = \bigcup \{u \mid \exists f (f \in A \,\&\, u = \mathrm{dom}(f))\}$$

и $\bigcup A$ е продължение на всяка функция от A.

Доказателство. 1) Нека $\bigcup A$ е функция. Ще докажем, че всеки елемент на A е функция и всеки две функции от A са съвместими. Наистина, нека $u \in A$. Тогава $u \subseteq \bigcup A$ и значи всеки елемент на u е наредена двойка, т. е. $\mathrm{Rel}(u)$. Ако $\langle x, y_1 \rangle \in u$ и $\langle x, y_2 \rangle \in u$, то $\langle x, y_1 \rangle \in \bigcup A$ и $\langle x, y_2 \rangle \in \bigcup A$, откъдето следва $y_1 = y_2$, понеже $\mathrm{Func}(\bigcup A)$. Следователно A е множество от функции.

Нека $f \in A$ и $g \in A$. Ще докажем, че f и g са съвместими. Нека $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$. Тогава $\langle x, f(x) \rangle \in f$ и $\langle x, g(x) \rangle \in g$, откъдето следва $\langle x, f(x) \rangle \in \bigcup A$ и $\langle x, g(x) \rangle \in \bigcup A$, поради което $f(x) = g(x)$, защото $\bigcup A$ е функция.

2) Сега нека A е множество от съвместими функции. Всеки елемент u на $\bigcup A$ е елемент на някоя функция f, $f \in A$, и значи $\mathrm{OrPr}(u)$. Следователно $\mathrm{Rel}(\bigcup A)$. Нека $\langle x, y_1 \rangle \in \bigcup A$ и $\langle x, y_2 \rangle \in \bigcup A$. Тогава съществуват f и g от A, за които $\langle x, y_1 \rangle \in f$ и $\langle x, y_2 \rangle \in g$. Тъй като $x \in \mathrm{dom}(f) \cap \mathrm{dom}(g)$ и f и g са съвместими, то $f(x) = g(x)$, т. е. $y_1 = y_2$. Следователно $\mathrm{Func}(\bigcup A)$.

3) Останалата част от твърдението — дефиниционната област на $\bigcup A$ е обединение на дефиниционните области на функциите от A, оставяме за самостоятелна работа. Само ще обърнем внимание, че най-напред читателят трябва да покаже, че множеството, написано в дясната страна на равенството, съществува.

Означения. Ако f е функция, а $A \subseteq \mathrm{dom}(f)$, то с $f[A]$ ще означаваме множеството $\{y \mid \exists x(x \in A \,\&\, f(x) = y)\}$, което ще наричаме *образ на A при f.*

Ако f е функция, а $B \subseteq \mathrm{rng}(f)$, то с $f^{-1}[B]$ ще означаваме множеството $\{x \mid \exists y(y \in B \,\&\, f(x) = y)\}$, което ще наричаме *прообраз на B при f.*

Ако f и g са функции, то $f \circ g$ е също функция h, която ще означаваме по обичайния начин $h(x) = g(f(x))$ за $x \in \mathrm{dom}(f \circ g)$ и ще наричаме *композиция на f и g.*

Ако A и B са множества, то с B^A ще означаваме множеството на всички функции f с дефиниционна област A и област от стойности, съдържаща се в B (т. е., която е подмножество на B). Непосредствено се проверява, че за произволни множества A и B множеството B^A съществува и е еднозначно определено.

Упражнение. Нека f и g са функции. Да се докаже, че:

1. $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ и $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ за произволни A и B, които са подмножества на $\mathrm{dom}(f)$;

2. $f^{-1}[A \cup B] = f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]$ и $f^{-1}[A \cap B] = f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]$ за произволни A и B, които са подмножества на $\operatorname{rng}(f)$;

3. $\operatorname{dom}(f \circ g) = f^{-1}[\operatorname{rng}(f) \cap \operatorname{dom}(g)]$ и $\operatorname{rng}(f \circ g) = g[\operatorname{dom}(g) \cap \operatorname{rng}(f)]$.

Теорема на Тарски за неподвижната точка. *Нека $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция, т.е. от $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$ следва $F(X_1) \subseteq F(X_2)$. Тогава F има неподвижна точка, т.е. съществува такова $X_0 \subseteq A$, че $F(X_0) = X_0$.*

Доказателство. Нека $\mathcal{X} = \{X \mid X \in \mathcal{P}(A) \,\&\, F(X) \subseteq X\}$. Тъй като $A \in \mathcal{X}$, $\mathcal{X} \neq \varnothing$ и значи можем да дефинираме $X_0 = \bigcap \mathcal{X}$. Ще покажем, че X_0 е неподвижна точка на F.

Нека X е произволен елемент на $\mathcal{X}$. От дефиницията на X_0 следва $X_0 \subseteq X$, от където, поради монотонността на F, получаваме $F(X_0) \subseteq F(X)$. Тъй като $X \in \mathcal{X}$, имаме $F(X) \subseteq X$. Така видяхме, че $F(X_0) \subseteq X$. Следователно

$$F(X_0) \subseteq \bigcap \mathcal{X} = X_0 \qquad (*)$$

и значи $X_0 \in \mathcal{X}$. Сега от $(*)$ и монотонността на F заключаваме $F(F(X_0)) \subseteq F(X_0)$, което показва, че $F(X_0) \in \mathcal{X}$. Следователно

$$F(X_0) \supseteq \bigcap \mathcal{X} = X_0. \qquad (**)$$

От $(*)$ и $(**)$ следва, че X_0 е неподвижна точка за F.

Непосредственият преглед на доказателството показва, че всъщност установихме верността на следното малко по-силно твърдение, което понякога също се нарича теорема на Тарски за неподвижната точка.

Ако $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ е монотонна функция, то неравенството $F(X) \subseteq X$ има най-малко по отношение на теоретико-множественото включване решение X_0. Това множество X_0 е неподвижна точка за F.

8. Сравняване на множествата по мощност

Въпросите за намиране и сравняване на „количествеността“ на различни съвкупности са като че ли от първите решавани практически задачи, които са стимулирали възникването на математиката. Вероятно визирайки „количествеността“ като *брой на обектите* от дадена съвкупност от физически обекти човек е достигнал до абстрактната представа за естествено число и за сравняване на съвкупности по брой на елементите им. Без да се впускаме в подробности само ще отбележим, че в някакъв смисъл е по-просто да сравним две съвкупности по броя на техните елементи, отколкото да кажем какво в същност е „брой на елементите“. В света на множествата „брой на елементите на дадено множество A“ ще бъде множество $\overline{\overline{A}}$, което, следвайки Кантор, ще наричаме *мощност* на множеството A. В този параграф ще сравняваме множества по тяхната мощност, без да казваме какво е мощност.

1. Равномощни множества. Казваме, че две множества A и B са *равномощни* и в този случай пишем $A \sim B$, ако съществува биекция на A върху B.

Най-напред ще отбележим, че при разумна дефиниция на мощност би трябвало две множества да са равномощни точно тогава, когато техните мощности са равни.

Твърдение 1. *За всеки три множества A, B и C са в сила:*
1. $A \sim A$;
2. $A \sim B \Longrightarrow B \sim A$;
3. $A \sim B \,\&\, B \sim C \Longrightarrow A \sim C$.

Доказателство. 1. Следва от факта, че за всяко множество A идентитетът в A, $f(x) = x$ за произволно $x \in A$, е биекция на A върху A.

2. За всяка биекция f на A върху B функцията f^{-1} е биекция на B върху A (вж. Следствие 1 от т. 7)

3. Непосредствено се съобразява, че композицията на биекции е биекция.

Твърдение 2. *Нека $A \sim A_1$ и $B \sim B_1$. Тогава:*
1. *Ако $A \cap B = \varnothing$ и $A_1 \cap B_1 = \varnothing$, то $A \cup B \sim A_1 \cup B_1$.*
2. $A \times B \sim A_1 \times B_1$.
3. $B^A \sim B_1^{A_1}$.

Доказателство. Нека f е биекция на A върху A_1, а g е биекция на B върху B_1.

1. $h = f \cup g$ е биекция на $A \cup B$ върху $A_1 \cup B_1$. (Проверете!)

2. Дефинираме $h(\langle x, y\rangle) = \langle f(x), g(y)\rangle$ за произволни $x \in A$, $y \in B$. Лесно се проверява, че h е функция, която е биекция на $A \times B$ върху $A_1 \times B_1$.

3. За произволна функция $t : A \to B$ да положим $h(t) = f^{-1} \circ t \circ g$. Както лесно можем да се убедим, $h(t)$ е функция и $h(t) : A_1 \to B_1$. Така дефинирахме функцията $h : B^A \to B_1^{A_1}$. Твърдим, че тя е биективна. Наистина, нека $t_1 : A \to B$, $t_2 : A \to B$ и $t_1 \neq t_2$. Тогава

съществува $x_0 \in A$, за което $t_1(x_0) \neq t_2(x_0)$. Инективността на g заключаваме $g(t_1(x_0)) \neq g(t_2(x_0))$ Да означим с u_0 онзи единствен елемент на A_1, за който $f^{-1}(u_0) = x_0$, т. е. $u_0 = f(x_0)$. Следователно $g(t_1(f^{-1}(u_0))) \neq g(t_2(f^{-1}(u_0)))$, т. е. $(h(t_1))(u_0) \neq (h(t_2))(u_0)$, откъдето получаваме $h(t_1) \neq h(t_2)$. С това доказахме, че h е инективна.

За да докажем сюрективността на h да предположим, че $t_1 \in B_1^{A_1}$. Нека положим $t = f \circ t_1 \circ g^{-1}$. Непосредствено се проверява, че $t \in B^A$ и $h(t) = t_1$.

Твърдение 3. *Нека A и a са произволни множества. Тогава $A \sim A \times \{a\}$. За всеки две множества A и B съществуват непресичащи се множества A_1 и B_1, които са равномощни съответно с A и B.*

Доказателство. Тривиално — разгледайте функцията $f(x) = \langle x, a \rangle$ за $x \in A$. Нека $a \neq b$. Положете $A_1 = A \times \{a\}$, $B_1 = B \times \{b\}$ и се убедете самостоятелно, че те имат нужните свойства.

Твърдение 4. 1. *Нека A е непразно множество. Не съществува множество сред чиито елементи са всички равномощни с A множества.*

2. *Не съществува бинарна релация, която съдържа всички наредени двойки от равномощни множества.*

Доказателство. 1. Да допуснем, че съществува множество C_A със свойството $\forall x(x \sim A \Longrightarrow x \in C_A)$. Тогава можем да дефинираме множеството B_A от всички множества от вида $A \times \{a\}$:

$$B_A = \{x \mid x \in C_A \,\&\, \exists a(x = A \times \{a\})\}.$$

Ясно е, че $\bigcup B_A$ е бинарна релация и $\forall y\,(y \in \operatorname{rng}(\bigcup B_A))$, т. е. $\operatorname{rng}(\bigcup B_A)$ е множеството на всички множества, което абсурдно.

2. Тривиално следствие от 1.

Доказаното твърдение показва, че опитът да се дефинира мощност на множество A като множеството на всички равномощни с A множества, $\overline{\overline{A}} = \{x \mid x \sim A\}$, е несъстоятелен. Твърде много са равномощните с A $(A \neq \varnothing)$ множества!

Да означим с 0, 1 и 2 съответно $\varnothing$, $\{\varnothing\}$ и $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$. Както знаем вече, тези множества са различни.

Твърдение 5. $\mathcal{P}(A) \sim 2^A$.

Доказателство. За всяко множество B, $B \in \mathcal{P}(A)$, с χ_B да означим характеристичната функция на B — $\chi_B(x) = \begin{cases} 0, & x \in B \\ 1, & x \notin B \end{cases}$ за произволно $x \in A$. Сега нека дефинираме функцията f така: $f(B) = \chi_B$. Непосредствено се проверява, че по този начин коректно сме дефинирали биекция f на $\mathcal{P}(A)$ върху 2^A.

Упражнения. Докажете, че:
1. $A \times B \sim B \times A$;
2. $C^{A \cup B} \sim C^A \times C^B$, ако $A \cap B = \varnothing$;
3. $\left(C^B\right)^A \sim C^{B \times A}$;
4. $A \cap B = \varnothing \Longrightarrow \mathcal{P}(A \cup B) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$;
5. $A \sim A \cup \{A\} \Longrightarrow \mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \cup \{\mathcal{P}(A)\}$;
6. $A \sim A \cup \{A\} \Longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \times \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$;
7. $A \sim A \cup \{A\} \,\&\, \mathcal{P}(A) \cup B \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A)) \Longrightarrow B \sim \mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$.

Сравняване на множествата по мощност. Както вече отбелязахме по-лесно е да сравним по големина мощностите на две множества, отколкото да дефинираме мощност на множество. Заради това сега ще се заемем със сравняване на множествата по мощност.

Дефиниция. Нека A и B са две множества. Ще казваме, че *мощността на A не надминава* (или че е *по-малка или равна на*) *мощността на B* и в този случай ще пишем $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$, ако съществува инекция $f : A \to B$. Ще казваме, че *мощността на A е по-малка от мощността на B* и в този случай ще пишем $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$, ако $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \,\&\, A \not\sim B$.

Ако дефиницията за мощност е разумна (вж. началото на параграфа), т. е. $A \sim B \iff \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$, а ние винаги ще предполагаме, че тя е такава, то

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \iff \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \,\&\, \overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}},$$

или, записано по друг начин

$$\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \iff \overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}.$$

Твърдение 6. 1. $A \subseteq B \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ и в частност $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{A}}$;
2. $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \,\&\, \overline{\overline{B}} \leq C \Longrightarrow \overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{C}}$;

Доказателство. Тривиално упражнение.

Следващата теорема се среща в литературата под различни имена. В известен смисъл тя е най-интересното твърдение за мощности, което може да се докаже без да се привличат по-силни аксиоми за света на множествата — аксиомата за фундираност или аксиомата за избора (вж. втората група аксиоми на Цермело–Френкел). Доказателството, което излагаме, е на Тарски.

Теорема на Кантор–Шрьодер–Бернщайн. *Ако* $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}}$ *и* $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}$, *то* $A \sim B$.

Доказателство. Нека f и g са инекции, $f : A \to B$ и $g : B \to A$. Ако има подмножество X_0 на A, такова че $A \setminus X_0$ е образът на $B \setminus f[X_0]$ при g, то непосредствено се съобразява, че функцията h, дефинирана с

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X_0 \\ g^{-1}(x), & x \in A \setminus X_0, \end{cases}$$

е биекция на A върху B.

Съществуването на такова $X_0 \subseteq A$ ще получим от теоремата на Тарски за неподвижната точка. За целта разглеждаме функцията $F : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$, дефинирана с

$$F(X) = A \setminus g[B \setminus f[X]] \quad \text{за} \quad X \subseteq A.$$

За да приложим теоремата на Тарски, трябва да проверим монотоността на F. Нека $X_1 \subseteq X_2 \subseteq A$, тогава $f[X_1] \subseteq f[X_2] \subseteq B$, поради което $B \setminus f[X_1] \subseteq B \setminus f[X_2] \subseteq B$, откъдето следва $g[B \setminus f[X_1]] \subseteq g[B \setminus f[X_2]] \subseteq A$ и значи $A \setminus g[B \setminus f[X_1]] \subseteq A \setminus g[B \setminus f[X_2]] \subseteq A$, т.е. $F(X_1) \subseteq F(X_2)$. Следователно F има неподвижна точка X_0, $F(X_0) = X_0$, т.е. $A \setminus g[B \setminus f[X_0]] = X_0$. От тук, пред вид $X_0 \subseteq A$, следва $A \setminus X_0 = g[B \setminus f[X_0]]$.

Упражнение. Следното твърдение обикновено се нарича теорема за междинното множество.

$$A \subseteq B \,\&\, B \subseteq A_1 \,\&\, A \sim A_1 \Longrightarrow A \sim B$$

1. Докажете, че теоремата за междинното множество е еквивалентна с теоремата на Кантор–Шрьодер–Бернщайн.

2. Докажете теоремата за междинното множество директно (без да използвате 1) с теоремата на Тарски.

Естествено е да се очаква, че следващото твърдение, с което ще се заемем, се отнася до възможността всеки две множества да се сравнят по мощност, а именно

$$\forall A \forall B (\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{B}} \vee \overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{A}}).$$

Оказва се обаче, че то е еквивалентно с аксиомата за избора и поради това ще го разгледаме в следващ параграф.

Упражнение. Нека $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{A}}_1$ и $\overline{\overline{B}} \leq \overline{\overline{B}}_1$. Тогава:
1. $\overline{\overline{A \cup B}} \leq \overline{\overline{A_1 \cup B_1}}$, ако $A_1 \cap B_1 = \varnothing$;
2. $\overline{\overline{A \times B}} \leq \overline{\overline{A_1 \times B_1}}$;
3. $\overline{\overline{(B^A)}} \leq \overline{\overline{\left(B_1^{A_1}\right)}}$;
4. $\overline{\overline{\mathcal{P}(A)}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A_1)}}$.

Доказателството на следващата теорема на Кантор съдържа в твърде общ вид идеята за така наречения канторов диагонален метод.

Теорема на Кантор за степенното множество. *За всяко множество A*

$$\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}.$$

Доказателство. Ясно е, че функцията $f : A \to \mathcal{P}(A)$, дефинирана с $f(x) = \{x\}$ за $x \in A$, е инективна. Следователно $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{\mathcal{P}(A)}}$.

По-интересно е доказателството на $A \not\sim \mathcal{P}(A)$. Вероятно ще забележите, че то съдържа идеята за парадокса на Ръсел. Да допуснем, че има функция g, която е биекция на A върху $\mathcal{P}(A)$. Да разгледаме множеството B, дефинирано по следния начин

$$B = \{x \mid x \in A \,\&\, x \notin g(x)\}.$$

Очевидно $B \subseteq A$ и значи съществува елемент b на A, за който $B = g(b)$. Сега лесно ще съобразим, че

$$b \in B \iff b \notin B,$$

което е абсурдно, и с това теоремата ще бъде доказана. Наистина, нека $b \in B$. Съгласно определението на B имаме $b \notin g(b)$, но $g(b) = B$, откъдето получаваме $b \notin B$. Нека сега $b \notin B$. Тъй като $B = g(b)$, имаме, че $b \notin g(b)$ и понеже $b \in A$ от определението на B следва $b \in B$.

Следствия. 1. Няма множество с най-голяма мощност.

2. Не съществува множество с елементи всевъзможните множества.

3. Не съществува множество C със свойството $\forall A \exists x (x \in C \,\&\, x \sim A)$. Казано по друг начин, мощностите са твърде много, за да образуват множество.

Доказателство. 1. Непосредствено следствие от теоремата на Кантор за степенното множество.

2. Вече няколко пъти стигахме до този извод с по-директни съображения, но сега ще приведем разсъждението на Кантор. Да допуснем, че съществува множеството на всички множества V. Тогава съществува и множеството $\mathcal{P}(V)$, за което ще е в сила $\mathcal{P}(V) \subseteq V$ (нали V е множеството на всички множества!). Следователно $\overline{\overline{\mathcal{P}(V)}} \leq \overline{\overline{V}}$, откъдето с помощта на теоремата на Кантор и теоремата на Кантор–Шрьодер–Бернщайн получаваме абсурдно $\overline{\overline{V}} = \overline{\overline{\mathcal{P}(V)}}$.

3. Да допуснем, че съществува такова множество C. Да положим $A = \mathcal{P}(\bigcup C)$. Съгласно свойството на C съществува x, $x \in C$ и $x \sim A$. От $x \in C$ получаваме $x \subseteq \bigcup C$, поради което $\overline{\overline{x}} \leq \overline{\overline{(\bigcup C)}}$. Следователно $\overline{\overline{A}} \leq \overline{\overline{(\bigcup C)}}$, откъдето, както в 2, стигаме до абсурд.