1. Нека f е биекция на Λ върху Λ и $\Lambda \neq \varnothing$. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ е фамилия от множества, индексирана с Λ. Докажете, че

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_{f(\lambda)} \quad \text{и} \quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_{f(\lambda)}.$$

(*Обобщен комутативен закон.*)

2. Нека за всеки две естествени числа n и k, $A_{n,k}$ е множество. Докажете, че

$$\bigcap_k \bigcup_n A_{n,k} = \bigcup_{f\in\mathbb{N}^\mathbb{N}} \bigcap_n A_{f(n),n}.$$

($\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа.)

3. Нека Λ е непразно множество и $\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ е фамилия от множества, индексирана с Λ. Да означим

$$M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} M_\lambda \quad \text{и} \quad K = \{Y \mid Y \in \mathcal{P}(M)\,\&\,(\forall\lambda\in\Lambda)(Y \cap M_\lambda \neq \varnothing)\}.$$

Нека $\{A_\mu\}_{\mu\in M}$ е фамилия от множества, индексирана с M. Докажете, че

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \bigcup_{t\in M_\lambda} A_t = \bigcup_{Y\in K} \bigcap_{\mu\in Y} A_\mu$$

и

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} \bigcap_{t\in M_\lambda} A_t = \bigcap_{Y\in K} \bigcup_{\mu\in Y} A_\mu.$$

(*Обобщен дистрибутивен закон.*)

4. Нека A е непразно множество, а S_1 и S_2 са разделяния на A. Казваме, че S_1 е *по-фино от* S_2, ако $(\forall X \in S_2)(\exists Y \in S_1)(Y \subseteq X)$ и пишем $S_1 \preceq S_2$. Нека $\mathcal{S}(A)$ е множеството от всички разделяния на множеството A. Вярно ли е, че:

а) $\langle \mathcal{S}(A), \preceq \rangle$ е частично наредено множество?

б) $\mathcal{S}(A)$ има ли най-малък и най-голям елементи относно $\preceq$ и, ако има, кои са те?

в) за произволни $S_1, S_2 \in \mathcal{S}(A)$ съществуват $\sup\limits_{\preceq}\{S_1, S_2\}$ и $\inf\limits_{\preceq}\{S_1, S_2\}$?

г) за произволно $M \subseteq \mathcal{S}(A)$ съществуват $\sup\limits_{\preceq} M$ и $\inf\limits_{\preceq} M$?

5. Нека $\langle A, \leq \rangle$ и $\langle B, \preceq \rangle$ са изброими и гъсти линейно наредени множества, който нямат нито пръв, нито последен елемент. Нека G е крайно множество от функции, дефинирани в A и приемащи стойности в B. Нека освен това за произволен елемент b на B множеството $\bigcup\{g^{-1}[\{b\}] \mid g \in G\}$ е крайно. Докажете, че съществува такъв изоморфизъм f на $\langle A, \leq \rangle$ върху $\langle B, \preceq \rangle$, че

$$(\forall a \in A)(\forall g \in G)(f(a) \neq g(a)).$$

6. Нека $f, g_1, g_2, \ldots, g_k \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$. Казваме, че f е сума на $g_1, g_2, \ldots, g_k$, ако за всяко естествено число n е в сила равенството

$$f(n) = g_1(n) + g_2(n) + \cdots + g_k(n).$$

а) Докажете, че за всяка $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ съществуват три биекции $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, такива че f е сума на g_1, g_2, g_3.

б) Дайте пример за $f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$, която не е сума на две биекции $g_1, g_2 \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$.

7. Докажете, че $\langle \mathbb{Q}, \leq \rangle$ има континуум автоморфизми.

8. Нека $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ е фамилия от множества, индексирана с Λ, и $\langle \Lambda, \leq \rangle$ е добре наредено множество. Докажете, че съществува фамилия $\{B_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, индексирана също с Λ и такава, че $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ и $(\forall \lambda \in \Lambda)(B_\lambda \subseteq A_\lambda) \,\&\, (\forall \lambda \in \Lambda)(\forall \mu \in \Lambda)(\lambda \neq \mu \Rightarrow B_\lambda \cap B_\mu = \emptyset)$.

9. Нека $\langle A, \leq \rangle$ е добре наредено множество. В $A \times A$ дефинираме бинарната релация $\preceq$ по следния начин:

$$\langle a_1, b_1 \rangle \preceq \langle a_2, b_2 \rangle \text{ точно тогава, когато}$$

$$\max_{\leq}\{a_1, b_1\} < \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \quad \vee \quad (\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \,\&\, a_1 < a_2) \quad \vee$$
$$(\max_{\leq}\{a_1, b_1\} = \max_{\leq}\{a_2, b_2\} \,\&\, a_1 = a_2 \,\&\, b_1 \leq b_2).$$

Докажете, че $\langle A \times A, \preceq \rangle$ е добре наредено множество.

10. Докажете, че $\mathrm{Lim}(\alpha)$ точно тогава, когато $\alpha = \bigcup\{\beta \mid \beta < \alpha\}$.

11. Нека $\varphi(\overline{u}, \alpha)$ е теоретико множествено свойство, което удовлетворява следните три условия:

(1) $\varphi(\overline{u}, 0)$,

(2) $\forall \alpha(\varphi(\overline{u}, \alpha) \Rightarrow \varphi(\overline{u}, S(\alpha)))$,

(3) $\forall \alpha(\mathrm{Lim}(\alpha) \,\&\, \forall \beta(\beta < \alpha \Rightarrow \varphi(\overline{u}, \beta)) \Rightarrow \varphi(\overline{u}, \alpha))$.

Докажете, че $\forall \alpha \varphi(\overline{u}, \alpha)$.

7 задачи са достатъчни за оценка 6.